УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ТРУДОВОЙ ШКОЛЫ
126

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

ОБРАЗЦЫ, ТЕМЫ И МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

Пособие для учащих и учащихся

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА - - 1923 - - ПЕТРОГРАД

УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ТРУДОВОЙ ШКОЛЫ
• 126 •

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

ОБРАЗЦЫ, ТЕМЫ И МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

Пособие для учащих и учащихся

С 38 чертежами



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА -- 1923 -- ПЕТРОГРАД



Гиз. № 6426. 10.000 экз. III. 24. VII. 23. Петрооблит. № 8585.

Предисловие.

В этой книжке имеется в виду лишь усвоение фактического материала школьной геометрии и не затрагивается вопрос о прохождении теоретического курса, обосновывающего этот материал. Автор полагает, что независимо от тех изменений, какие должно претерпеть преподавание теории, следует искать способов улучшить усвоение фактического материала геометрии, далеко не удовлетворительное при нынешней постановке обучения. В качестве такого средства здесь выдвигаются упражнения в решении задач с реальным содержанием, — занятие, которое должно иметь также и важное общеобразовательное значение. Автор дает подробные практические указания относительно того, из каких областей может быть почерпаем материал для подобных упражнений и как его следует обрабатывать. Опыт составления систематического сборника таких задач представляет „Новый задачник по геометрии“ (Гос. Изд-во, 2-е изд. 1923).

Я. П.

Метрическая система мер.

Метр (= 40-миллионной доле окружности земного шара) = 10 дециметрам = 100 сантиметрам = 1000 миллиметрам.

Километр = 1000 метров = 0,94 версты.

Грамм = весу 1 кубического сантиметра чистой воды.

Килограмм = 1000 граммов = 2,44 фунта. Тонна = 1000 килограммов.

Литр = 1 кубич. дециметру (= 0,081 ведра = 0,038 гарнца).

Таблица перевода мер.

метры	дюймы	футы	сажени	аршины	вершки
1	39,4	3,28	0,49	1.41	22,5
0,025	1	0,083	0,012	0,036	0,57
0,304	12	1	0,143	0,429	6,86
2,13	84	7	1	3	48
0,71	28	2,333	0,333	1	16
0,044	1,75	0,146	0,0208	0,0625	1

Сокращенные обозначения.

метр — *м*	миллиметр — *мм*	миллиграмм — *мг*
километр — *км*	грамм — *г*	тонна — *т*
сантиметр — *см*	килограмм — *кг*	литр — *л*

(точка после сокращенного обозначения не ставится).

I.

Как сделать изучение геометрии интересным и жизненным?

Если проследить за тем, какие геометрические навыки выносятся из школы большинством людей, то всего чаще результаты получатся весьма плачевные.

Подведите к дереву ученика, недавно с успехом выдержавшего экзамен из геометрии, и предложите ему измерить его высоту. Почти наверное можно сказать, что он не найдется, как это сделать, хотя у него в десять раз больше геометрических познаний, чем требуется, чтобы решить эту задачу чуть не десятью различными способами. Он без затруднения решает замысловатые задачи „на построение“ и „на вычисление“, — но только тогда, когда все данные заботливо указаны и самый род задачи известен заранее („на подобие треугольников“). Если же данные приходится избирать самому и никто не сообщает, к какому отделу геометрии задача относится, — наш геометр беспомощен.

Спросите человека, проходившего геометрию, какое бревно будет тяжеле, — то, которое втрое

длиннее данного, или то, которое втрое толще данного? В лучшем случае вы услышите, что оба бревна должны весить одинаково. Большинство же уверено, что длинное тонкое бревно тяжеле короткого толстого [1]). Правильный ответ, что толстое втрое тяжеле, — вы услышите очень редко, даже если опрашиваемые помнят формулу объема цилиндра.

Предложите вопрос: сколько весит вода в игрушечном ведерке, которое вдесятеро ниже настоящего, вмещающего 30 фунтов воды? Ответы будут в десять и в сто раз больше истинного; а ваше утверждение, что вода в ведерке должна весить всего около 1 лота, будет выслушано с недоверием.

Спросите, какой ширины радуга, и вы узнаете, что она представляется большинству „в одну, в полторы сажени"...

Вопрос, сколько могло весить одно яблоко из тех, что сшибли с ног Гулливера в стране великанов, где линейные протяжения всех предметов в 12 раз больше нормальных, — останется без ответа, а ваше утверждение, что каждое яблоко могло весить пудов 6—8, будет горячо оспорено (см. № 132).

[1]) При покупке дров бревнами и продавцы, и покупатели склонны до курьеза переоценивать объем длинных бревен; продавцы запрашивают за них несоответственно высокие цены, а покупатели предпочитают именно такие бревна, хотя толстые короткие бревна большего объема охотно уступаются по дешевой цене. Такое же неумение правильно сравнивать объемы тел можно заметить и в расценке яиц, арбузов и т. п.: крупные яйца и арбузы всегда расцениваются — и продавцом, и покупателями — относительно дешевле мелких. Изучение геометрии в школе обычно не изменяет этих курьезных геометрических заблуждений. (См. зад. №№ 13 и 15).

Спросите, какой стакан с кипятком должен остыть раньше, большой или маленький — и вы убедитесь, что редко кто догадывается подойти к этой задаче геометрически (см. зад. № 72).

Даже и в научных сочинениях приходится встречать грубые геометрические промахи. В одном руководстве для исследований по гигиене, составленном видным автором, читаем следующее наставление к пользованию мерной лентой: „Деления ленты начинаются не от самого начала ее, а отступя некоторый промежуток для того, чтобы можно было удобнее и крепче взять ленту рукой. Так, на наших рулетках нолевая точка находится на расстоянии 8 и более сантиметров от края ленты: следовательно, если это упустить из виду, то на это число и произойдет ошибка, которая при квадратном измерении составит 64 кв. сантиметра, а при кубическом — 512 кв. см". Автор не подозревает, что ошибка будет гораздо больше и что он, — откинув те части площади и объема, которые надо было принять в расчет прежде всего, — учел именно то, чем можно было вовсе пренебречь. Если в академической среде возможны такие ошибки, то чего ожидать от прочих людей? [1]).

Чем же объяснить такую печальную геометрическую беспомощность, неумение применить к делу приобретенные в школе геометрические познания? Почему школьная геометрия остается без заметного влияния на умственный обиход и практические навыки людей, ее изучавших?

[1]) О геометрических ошибках у Пушкина и Гоголя — см. далее, задачи №№ 130 и 131.

Объяснение, думается мне, следует искать в особенностях учебного материала математики и в психологии заучивания. Успешное усвоение всякого учебного предмета предполагает:

1) отчетливое понимание его содержания;

2) прочное закрепление его в памяти.

Первое, понимание, возможно лишь при сосредоточении внимания учащегося на предмете, т.-е. при наличии живого к нему интереса. Второе, запоминание, обеспечивается ассоциациями учебного материала с возможно бо́льшим числом представлений из других областей знания и жизни.

Причина особой „трудности" геометрии для большинства учащихся и быстрого ее забвения по оставлении школы кроется в том, что при обучении математике как раз отсутствуют оба указанные условия успешного усвоения: преподавание обычно ведется так, что у учащихся не поддерживается живой интерес к предмету и не создается прочных и разнородных ассоциаций изучаемого материала с остальными элементами их умственного инвентаря.

Какой, в самом деле, интерес может представлять для учащегося изучение геометрии? Прежде всего, ему непонятна цель изучения этого предмета. Перебирая возможные цели преподавания школьной геометрии, мы должны, конечно, исключить такие отвлеченные и непонятные ученику цели, как развитие пространственной интуиции и воспитание логического мышления: цели эти могут ставиться учителем, но для ученика являются лишь результатом изучения геометрии, а не ясно сознаваемой целью. Третья цель — познание свойств геометрических фигур — могла бы служить для учащегося одушевляющим изучение стимулом только в том случае, если бы он ощущал надобность в знании этих свойств. Само же по себе изучение свойств воображаемых фигур, заведомо не существующих в реальной действительности, не может большинству учащихся казаться нужной и осмысленной работой. До тех пор пока в глазах ученика единственное применение свойств геометрических фигур состоит лишь в том, что помощью их выводятся другие геометрические свойства, которые в свою очередь служат для обоснования новых — нельзя ожидать, чтобы такая неуловимая, уходящая в бесконечность цель могла поддерживать интерес к изучению предмета.

Другое дело, когда учащиеся почти на каждом шагу убеждаются, что знание свойств геометрических фигур с успехом применимо к разрешению многочисленных и разнообразных задач, возникающих в действительной жизни — в обиходе, в технике, в естествознании. Тогда, и только тогда, изучение геометрии с первых же уроков приобретает живой интерес для учеников, — при том для всех, а не только для наиболее одаренных одиночек. И если желательно, чтобы прохождение геометрии не было в глазах учащихся бесцельным занятием, лишенным смысла и интереса, необходимо поставить обучение так, чтобы ученик приучался широко и уверенно распоряжаться приобретаемыми геометрическими знаниями для решения разнообразных реальных задач. Он должен чувствовать, что геометрия снабжает его применимыми к жизни сведениями, вооружает могущественным орудием познания действительности.

Все признают, что только с решения задач, т.-е. с самостоятельных упражнений, начинается подлинное усвоение математической дисциплины; до этого момента изучение является лишь ознакомлением с учебным материалом. Но те геометрические задачи и упражнения, которым обычно уделяется в школе довольно много внимания, совершенно недостаточны, чтобы помочь ученикам овладеть учебным материалом до степени свободного распоряжения своими знаниями для практических целей, потому что в них почти нацело отсутствуют элементы, связывающие учебник с жизнью и создающие прочные ассоциации изучаемого материала с реальной действительностью. Ученик не упражняется прилагать формальные геометрические отношения к конкретным объектам. Мысль работает исключительно в мире абстрактных пространственных образов и утрачивает всякую связь с той реальной действительностью, от которой эти образы абстрагированы [1]). Замыкая геометрический

[1]) До чего доходит пренебрежение элементом реальности даже в хороших учебниках геометрии, видно из следующего характерного примера. В числе полудюжины задач с реальным содержанием, включенных в „Элементы геометрии“ Филипса и Фишера, находим три задачи такого рода:

„Некто имеет 323,25 кв. м земли в форме равностороннего треугольника. Каждому из своих трех сыновей он дал три наибольшие равные круга земли, которые можно получить в данном треугольнике; каждой из трех дочерей — угловые участки, отрезанные кругами; трем внукам — участки, заключенные между сторонами и двумя кругами; себе оставил центральный участок между тремя кругами. Найти долю каждого“.

Конечно, авторы хорошо знают, что участков такого затейливого фасона никто, находясь в здравом уме, не выкраивает. Но в геометрическом задачнике подобные нелепости считаются вполне допустимыми.

кругозор ученика пределами „чистой“ геометрии, школа приучает его решать только такие задачи, которые искусственно очищены от реального содержания и препарированы в виде обнаженной геометрической схемы. Производить же самостоятельно подобные умственные операции, уметь нащупывать геометрический скелет реальной проблемы — школа ученика не приучает. Естественно, что он не приобретает навыка усматривать геометрические отношения в реальной жизненной обстановке, переводить конкретные задачи на геометрический язык. Давно известно, что правильно формулировать задачу — значит наполовину решить ее, но этой-то первой половины решения всякой конкретной задачи никак не сможет найти учащийся, не подготовленный к тому систематическим упражнением. Благодаря такому направлению в обучении, получается то, что геометрические сведения учащегося ассоциируются не с реальными объектами, а лишь с определенными страницами учебной книги. Такое знание, сохраняющее свежесть только в стенах школы, быстро утрачивается, едва их обладатель вступает в действительный мир, столь мало похожий на искусственную классную обстановку [1]).

[1]) В связи с этим надо поставить и то не случайное обстоятельство, что арифметические навыки давно успели проникнуть из школы в жизнь, а геометрические, гораздо более древние, не идут далее школьных стен. Современный средний человек, прошедший элементарную школу, выполняет счетные операции несравненно толковее и проворнее, чем его предок эпохи средних веков и начала нового времени; он уже не откладывает производства деления многозначных чисел до праздничного дня, когда на ярмарке в ближайшем городе можно будет обратиться к услугам странствующего „магистра деления“. Между тем, в геометрии современный обыватель мало ушел

Нередко высказывается мнение, что преподавание одного только теоретического курса геометрии при строгой постановке должно дать такое развитие уму учащегося, при котором решение реальных геометрических задач не может составить для него никаких затруднений. Но это убеждение совершенно иллюзорно. Как недостаточно знать устройство велосипеда, чтобы уметь на нем кататься, а надо еще особо учиться ездить, так одно знание геометрических отношений не дает уменья ими пользоваться в реальной обстановке, если не было упражнения в их применении. И мы наблюдаем на каждом шагу, что поразительное отсутствие реального геометрического чутья, подлинной геометрической изобретательности прекрасно уживается с наличием достаточно отчетливых теоретических познаний. Все, кто давал себе труд испытать, умеют ли ученики, сильные в школьной геометрии, разрешать задачи практического характера, единодушно подтверждают их полную беспомощность в этом отношении. Характерен отзыв об этом проф. П. А. Некрасова (кажется, бывшего попечителя Московского учебного округа) в докладе на съезде преподавателей Московского округа в 1899 г.:

вперед по сравнению с глубокой древностью; сельские жители еще и теперь определяют площади непрямоугольных участков буквально с теми же ошибками, какие были обычны в древнем Египте и в средневековой Европе. Причина большей популярности арифметических навыков по сравнению с геометрическими лежит, думается, в том, что школьная арифметика не так строго замыкалась в мир формальных отношений, как геометрия. Сборники арифметических задач всегда упражняли силы учащегося не только на абстрактном, но также и на конкретном — пусть не всегда удачно подобранном — материале.

„Установленная учебными планами цель преподавания математики достигается в гимназиях удовлетворительно, а иногда превосходно, и много абитуриентов гимназий считают себя особенно подготовленными на математический факультет. Отчеты об испытаниях зрелости по математике в гимназиях также свидетельствуют большею частью, что абитуриенты добросовестно исполнили по математике то, что от них требовалось программами. И, однако, результаты обнаруживаются самые плачевные, как только такому математику приходится применить свои познания к самому простому конкретному научному факту... В Московском университете на экзаменах первокурсников я видел полную неразвитость студентов с математической схоластической подготовкой, как только простой вопрос ставил их в необходимость перенестись на почву конкретной действительности и проявить не одно только формальное развитие математических знаний“.

Современное преподавание, несмотря на улучшение методов обучения, приводит почти к подобным же результатам. Каков бы ни был выбор материала для школьного курса, как бы ни распределялся этот материал по концентрам, каким бы способом ни доводились до сознания учащихся геометрические положения, — уменье самостоятельно распоряжаться приобретенными сведениями для решения реальных жизненных задач не может быть достигнуто, если оно ни развивалось специальными упражнениями.

Не надо забывать, что геометрические задачи редко возникают на практике в той отвлеченной форме, в какой они обычно предлагаются задач-

никами. В реальной жизни, в технике, в науке геометрическая сторона задачи большею частью заслоняется, затушевывается посторонними элементами, из которых ее необходимо выделить, прежде чем приступить к решению. Но умение отыскивать в конкретной задаче ее геометрическую основу, переводить реальный вопрос на язык геометрии, требует особого навыка; и, конечно, он не может быть приобретен упражнением исключительно на готовых схемах, обычно предлагаемых задачниками. Искусство прилагать свои математические познания за пределами ученической тетрадки и классной доски может быть воспитано лишь систематическим упражнением в решении задач с конкретным содержанием, приближающихся по своей форме к тем, какие возникают в действительной жизни. Отсюда — необходимость пополнить традиционный материал геометрических задачников подбором упражнений особого рода, преследующих указанную цель.

Эти реальные упражнения, помимо своего утилитарного значения — снабжения учащихся полезными практическими навыками — выполняют важную педагогическую роль: оживляют интерес к геометрии и, порождая многочисленные ассоциации с действительностью, обезпечивают приобретенным знаниям более прочное пребывание в памяти.

Темы для реальных задач должны черпаться из самых разнообразных областей: из житейского обихода, из так называемой „малой“ техники, из географии, мироведения, естествоведения, физики; наконец, во время загородных экскурсий или занятий на школьном дворе должны предлагаться задачи и упражнения с данными, взятыми непо-

средственно в натуре. Опасение, что такого рода упражнения будут отвлекать внимание учащихся от чисто-геометрических отношений и даже затемнять их, не более обосновано, чем для родственной науки — арифметики. Все дело в соблюдении должной меры, в известном педагогическом такте. Разве жизненное содержание арифметических задач затемняет количественные отношения, которые ими иллюстрируются? Да и каким другим способом можно научить применять геометрию на практике, как не упражнениями, относящимися к практике? Наконец, — и это особенно надо подчеркнуть — реальное направление в выборе задач вовсе не исключает упражнений формальных. Последние лишь *пополняются* задачами с конкретным содержанием. Те и другие должны переплетаться: задачи теоретические иллюстрируются реальными применениями, задачи реальные выдвигают вопросы теоретические.

Точно также реальное направление в выборе упражнений не требует непременно соответствующей обработки теоретического курса, не определяет ни объема, ни характера его. Оно полезно при всяком методе преподавания. Выбор материала и характер изложения курса, число теорем и способ их прохождения могут быть те или иные, в зависимости от методических требований. Но каковы бы они ни были, теоретический материал должен быть во всяком случае оживляем и закрепляем достаточным количеством упражнений реального характера [1]).

[1]) В числе прочих возражений, какие мне доводилось слышать против введения в преподавание геометрии упражнений реального характера, наиболее частое — это ссылка на недоста-

В дальнейших главах рассматривается множество примеров геометрических задач с реальным содержанием, распределенных по сюжетам: задачи из обиходной жизни, из техники и агрономии, из географии и землеведения, из мироведения, из физики, из живой природы; указываются упражнения, выполнимые во время экскурсий; рассматривается и ряд задач особого рода, не укладывающихся в перечисленные рубрики, а также некоторые приемы вычислений, облегчающие решение таких задач. Кроме образцов и тем, прилагаются справочные сведения в качестве сырого материала для упражнений указанного типа. Подбор задач и тем, как и выбор прилагаемого к ним справочного материала, далеко не исчерпывают всех возможных примеров упражнений с реальным содержанием и вовсе не стремятся к подобной полноте. Их цель — лишь облегчить первые шаги преподавателя, который желал бы испытать на практике рекомендуемый здесь путь, а для такой цели чрезмерное обилие материала было бы обременительно. Наконец, к услугам преподавателя имеется составленный мною систематический сборник реальных геометрических задач („Новый задачник по геометрии“, 1923 г., 2-е изд.).

ток времени: отведенных часов едва хватает для прохождения курса, требуемого по программе, и совершенно не остается времени для новых упражнений. Подобные доводы мне непонятны и звучат для меня приблизительно так: некогда заниматься усвоением предмета, так как надо спешить не усваивать его...

II.

Задачи из обиходной жизни.

Геометрические задачи с реальным содержанием следует, вообще говоря, предлагать облеченными в ту форму, в какой они возникают в действительности. Но если это не всегда возможно и удобно для задач из области техники и естествознания, где приходится облегчать ученику работу перевода реального задания на геометрический язык, то для упражнений из хорошо знакомой обиходной жизни желательно почти всегда придерживаться указанного правила.

Приведем несколько примеров подобных задач.

1. В каком месте незастроенного треугольного двора нужно поместить фонарь, чтобы все три угла двора были освещены им одинаково?

Решение. Учащийся должен, без указания учителя, сообразить, что задача сводится к разысканию точки, равно удаленной от вершин треугольника.

2. (Вариант предыдущей задачи). В середине трех сторон четыреугольного незастроенного

участка имеются ворота. Где внутри двора находится место, одинаково удаленное от всех ворот?

3. При так называемой фигурной пахоте плугом пахарь проводит борозды вдоль межников поля, начиная пахать с краев участка. Становясь у какого-нибудь угла полевого клина, пахарь начинает пахать, отваливая пласт борозды на соседний участок, и дойдя до другого угла, поворачивает вдоль другой стороны; так обходит он весь участок, возвращаясь к углу, с которого была начата борозда. Вторую борозду он проводит рядом с первою, сваливая пласт в первую борозду. Проводя борозду за бороздой, пахарь подвигается внутрь участка, пока не распашет его до конца. — Можете ли вы приблизительно указать заранее то место внутри *треугольного* полевого клина, где фигурная пахота должна окончиться?

Решение. Так как отваливаемые пласты одинаковой ширины, то пахота должна окончиться в точке, одинаково удаленной от сторон треугольника.

4. Громоотвод защищает от молнии все предметы, расположенные от его основания не далее его двойной высоты. Где на треугольном участке выгоднее всего поместить громоотвод, чтобы высоту его можно было сделать наименьшею?

Ответ: в центре описанного круга.

5. Вдоль трех сторон многоугольного участка течет канава. Как найти внутри участка место, одинаково удаленное от воды?

Ответ: искомая точка лежит на пересечении биссектрис двух углов, составляемых направлениями частей канавы.

6. Желая проверить, имеет ли отрезанный кусок материи форму квадрата, швея убеждается, что при перегибании по диагоналям края обеих частей совпадают. Достаточна ли такая проверка?

Решение. Недостаточна: указанный прием убеждает лишь в том, что фигура есть четыреугольник, симметричный относительно обеих диагоналей, — а такой симметрией обладает не только квадрат, но и ромб. (Так как указанное заблуждение очень распространено, то полезно выяснить его наглядно, вырезав из бумаги соответствующую фигуру, а также рассмотреть вопрос, какие дополнительные измерения были бы достаточны, чтобы установить квадратную форму вырезанного куска; предполагается, что углов измерить нельзя).

7. Переплетчик для проверки того, имеет ли вырезанный из картона четыреугольник прямые углы, убеждается, что диагонали его равны. Достаточна ли такая проверка?

Ответ: недостаточна (начертить четыреугольник с равными диагоналями, но не имеющий прямых углов; какие нужны дополнительные измерения, если не измерять углов?).

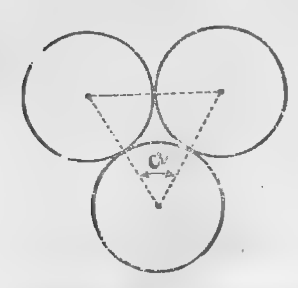
8. Паркетчик, проверяя, имеет ли выпиленный четыреугольник форму квадрата, убеждается, что диагонали его равны и встречаются под прямым углом. Достаточна ли такая проверка?

Ответ: недостаточна (начертить четыреугольник с равными взаимно-перпендикулярными диагоналями, не имеющий прямых углов; какие нужны дополнительные измерения?).

9. Какова приблизительно толщина дерева „в два обхвата"?

Решение. Средняя длина „обхвата", т.-е. расстояния между концами пальцев расставленных рук, приблизительно равна средней высоте человеческого роста — $1^3/_4$ метра [1]). Два обхвата — $3^1/_2$ метра — есть длина окружности, диаметр которой легко найти: $\frac{7}{2} : \frac{22}{7} = 1\frac{5}{44}$, т.-е. около 110 см, или $1^1/_2$ аршина.

10. Стакан вплотную обставлен соприкасающимися с ним и между собою стаканами такой же величины. Сколько их?



Черт. 1. К зад. № 10.

Решение. Из чертежа 1 видно, что прямые, соединяющие центры среднего и двух соседних соприкасающихся с ним стаканов, образуют равносторонний треугольник (учащиеся должны это доказать). Следовательно, угол $a = 60°$ и, значит, вокруг его вершины помещается $\frac{360}{60} = 6$ таких углов. Отсюда число окружающих стаканов — 6.

11. Чтобы горячий чай остыл быстрее, его переливают в блюдце. Во сколько раз увеличивается при этом свободная поверхность чая?

---

[1]) Это соотношение (канон Леонардо да-Винчи) учащимся полезно запомнить, предварительно проверив его непосредственными измерениями.

Решение. Учащиеся должны сами избрать подходящие размеры диаметров окружностей стакана и блюдца. Поверхность увеличивается в отношении квадратов этих диаметров. Если верхний диаметр блюдца — 25 см (чай налит до краев), а стакана — 7 см, то отношение свободных поверхностей = 144 : 49 = около 3.

12. Яблоко при печении сморщивается. На что это указывает?

Решение. На то, что объем яблока при печении уменьшается, кожура же сохраняет прежние размеры. Сделать примерный расчет: вычислить, какой избыток кожуры получается, когда яблоко диаметром 8 см уменьшается (вследствие потери воды при нагревании) на 4 миллиметра по диаметру. $4\pi \cdot 40^2 - 4\pi \cdot 38^2 = 4\pi(40^2 - 38^2) = 4\pi \cdot 78 \cdot 2 =$ 1961 кв. мм или около 20 кв. см. Следовательно, общая поверхность всех морщин печеного яблока, при указанных размерах, равна 20 кв. см.

Полезно начертить первоначальную поверхность яблока и найденную общую поверхность складок в натуральную величину — в форме прямоугольников или кругов. Вообще полезно упражняться в изображении, даже по глазомеру, поверхности небольших шариков хорошо знакомых размеров — глобуса, мяча, вишни, горошины. Можно также сообщить ученикам сущность теории (Зюсса) о происхождении складчатых гор вследствие сморщивания коры остывающего ядра земного шара и познакомить с вычислением первоначального диаметра Земли по величине поверхности всех складчатых гор нашей планеты [1]).

---

[1]) См. О. Лукашевич „Неорганическая жизнь Земли", ч. I, стр. 170 и след., а также мою „Занимательную физику", кн. 2-ю.

13. Имеются два цилиндрических бревна. Одно 4 вершка в толщину и $1^1/_2$ аршина в длину. Другое на вершок толще, но на пол-аршина короче. Какое больше в объеме?

Решение. Толстое бревно имеет площадь сечения в $\frac{5^2}{4^2}$, т.-е. в $1^9/_{16}$ больше, чем у тонкого; длина же его меньше всего в $1^1/_2$ раза; следовательно оно в объеме больше (на 4% с небольшим). — Задача допускает много вариантов.

14. Во сколько раз объем мясистой части вишни больше объема косточки? Толщину слоя мякоти принять равной ширине косточки.

Решение. Так как диаметр вишни втрое больше диаметра косточки (то и другое принимают за шары), то объем вишни больше объема косточки в 27 раз, а объем мякоти больше объема косточки в 26 раз. Значит, объем косточки составляет $^1/_{26}$, т.-е. 4% объема мякоти.

15. Какие яйца выгоднее покупать: 60-миллиметровые (длина) по 1 рублю или 55-миллиметровые по 75 копеек?

Решение. Объем меньшего яйца (т.-е. количество питательных веществ в нем), считая форму обоих яиц одинаковою, меньше объема крупного яйца в отношении $55^3 : 60^3 = \frac{1331}{1728} = 0{,}71$. Следовательно, меньшие яйца должны были бы продаваться по цене 71 коп., а не 75 коп. Крупные яйца в данном случае дешевле.

В качестве справочного материала для составления задач наподобие рассмотренных выше примеров, здесь приведены сведения о размерах некоторых обиходных предметов — посуды, плодов, частей человеческого тела и т. п.

Справочные сведения к главе II.

Размеры различных предметов.

	Диаметр	Высота.
Стакан (емкость 200 кб. см).	6—7 *см.*	9 *см.*
Блюдце	13—15 *см.*	$1^1/_2$—2 *см.*
Тарелка	23 *см.*	$1^1/_2$—3 *см.*
Кастрюли [1]	15 *см.*	9 *см.*
	20 *см.*	13 *см.*
Стеклян. банка (литровая).	$8^1/_2$ *см.*	22 *см.*
Жестянка от килек.	10 *см.*	5 *см.*
Картонка для шляп.	30 *см.*	13 *см.*
Разливат. ложка (полушар).	9 *см.*	—

		диаметр.
Яблоки	антоновка	7—8 *см.*
	апорт	10—11 *см.*
	анис, ренет	6—7 *см.*
Вишня владимирская		15 *мм.*
Абрикос		5 *см.*
Горошина		4—5 *мм.*

[1]) Самой рациональной — в смысле экономного нагревания — является кастрюля в форме цилиндра, высота которого вдвое меньше диаметра основания.

	длина	ширина.
Яйцо куриное [1] . .	50 — 55 *мм.*	35 — 40 *мм.*
Карандаш кругл. .	$17\frac{1}{2}$ *см.*	7 *мм.*
Спичка	5 *см.*	2 *мм.*
Спичечн. коробок .	6 *см* × 4 *см* × 1,7 *см.*	
Кирпич (нормальн. формат). . . .	6 × 3 × $1\frac{1}{2}$ вершк.	
Толщина шва при кладке	$\frac{1}{4}$ вершка.	

Вместимость:

Столовой ложки	12 — 15 *куб. см.*
Чайной ложки	3 — 4 *куб. см.*
Молочной кружки . . .	$\frac{1}{2}$ литра.

Книга. Толщина книги в 600 стран. — 3 *см.* Размер страницы: 15 × $22\frac{1}{2}$ *см.* Размер текста: $10\frac{1}{2}$ × 17 *см.*

Тело взрослого человека. Рост (= расстоянию между концами расставленных рук) — 1,75 *м.* Ширина раздвинутой кисти („четверть") — 18 *см.* Длина указательного пальца (от основания большого) — 10 *см.* Ширина ногтя указательного пальца — около 1 *см.* Расстояние между зрачками глаз — 6,5 *см.* Поверхность тела — 2 *кв. м.* Объем — 60 куб. дециметров. (№ воротника = = окружности шеи в сантиметрах).

Колодец. Размеры $1\frac{1}{2}$ — 2 аршина (в свету) в стороне квадрата или в диаметре. Глубина воды — не более $1\frac{1}{2}$ аршин (чтобы вода не застаивалась).

[1]) Вес = 7 — 20 золотн. Скорлупа составляет 10% общего веса.

III.

Задачи из техники и сельского хозяйства.

Здесь следует избирать задачи с большой осмотрительностью, чтобы техническое содержание лишь иллюстрировало геометрические отношения, а не осложняло их. Само собою разумеется, что можно черпать материал только из мира так называемой „малой техники" и при том из тех ее областей, которые достаточно знакомы данному составу учащихся. Токарный станок или велосипед могут дать хороший материал для упражнений, относящихся к длине окружности [1]), — но только при условии, что оба находятся под руками или хорошо знакомы учащимся; в противном случае нужно отказаться от этих упражнений и заменить другими (самопрялка, точильный станок и т. п.).

Но даже и при таком осторожном отношении выбор подходящего материала огромен. Основание откосов; длина стропильных ног и затяжки; обмер и распиловка бревен на дрова или на доски; размещение растений на грядах огорода или сеянцев

[1]) В моем „Новом задачнике по геометрии" упражнениям относящимся к токарному станку, отведен отдельный параграф.

в питомнике; стрелка свода; радиус и положение центра дорожного закругления; конические кучи песку или щебня; количество воды в колодцах разной формы; количество воды, подаваемое трубой или протекающее через живое сечение реки или канавы; площадь живого сечения; расход материалов на покраску; толщина слоя позолоты; вес проволоки данной толщины и длины; давление пара в цилиндре; параллелограмм движений; механизмы, основанные на свойствах параллелограмма; зубчатые колеса; бесконечный ремень — все это может послужить темами для нескончаемого ряда задач. Почти каждая страница технического справочника, вроде „Hütte" или „Урочного положения" Рошфора, дает материал для упражнений по тому или иному отделу геометрии.

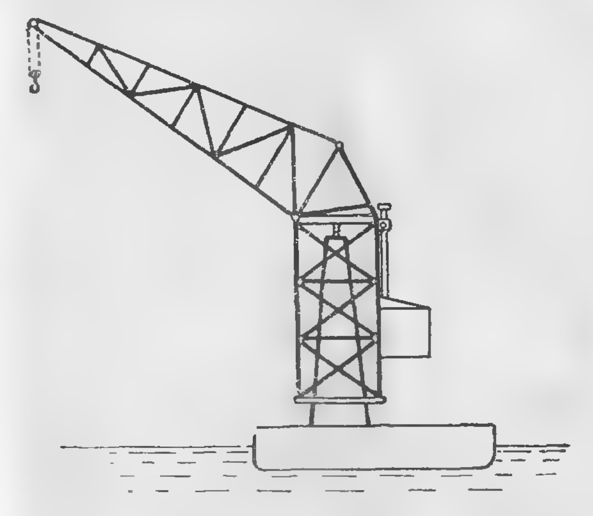
Рассмотрим ряд примеров:

16. При постройке кровель, мостов, подъемных кранов (черт. 2) и т. п. сооружений скрепляют опорные брусья или балки так, чтобы они образовали систему треугольников (обратить на это внимание во время экскурсии!). Почему такое расположение балок лучше обеспечивает неизменность формы сооружения, нежели иное?

Решение. Балки таких сооружений сами по себе почти не поддаются ни растяжению, ни сокращению длины. Возможно было бы лишь изменение углов их взаимного наклонения. Но с тремя сторонами данной длины может существовать только один треугольник; поэтому при неизменной длине балок, скрепленных в форме треугольника, углы, составленные ими, должны оставаться неизменными. Отсюда — постоянство формы

всего сооружения, составленного из треугольников.

17. Окружная (линейная) скорость точильного камня не должна, при правильной работе, превышать 44 фута в сек. Определить наибольшее до-



Черт. 2. К зад. № 16.
Треугольное расположение опорных балок в пловучем подъемном кране.

пустимое число оборотов в минуту для точильного камня, имеющего в диаметре 3 фута.

Решение. Окружность камня $3 \times \frac{22}{7}$ фут. Деля минутную наибольшую скорость 44×60 фут.

на длину окружности, получаем искомое число оборотов: 280. Большее число оборотов в секунду недопустимо.

18. Почему передняя ось телеги обыкновенно больше стирается и чаще загорается, нежели задняя. Указание: обратить внимание на сравнительные размеры передних и задних колес.

Решение. Так как окружность передних колес меньше, то на одном и том же пути меньшее (переднее) колесо делает больше оборотов. Отсюда большее изнашивание передней оси. (При случае — получить данные о размерах колес и сделать соответствующее вычисление).

19. Наклон почвы не замечается нами, если высота подъема не превышает $^1/_{24}$ его основания („заложения"). Сколько приблизительно градусов в угле такого наклона?

Решение. Длину меньшего катета весьма вытянутого прямоугольного треугольника, получающегося при этом, можно без ощутительной погрешности приравнять длине дуги, описанной радиусом, равным другому катету. Задача сводится, следовательно, к вычислению числа градусов дуги, длина которой равна $^1/_{24}$ длины радиуса. Из пропорции:

$$x : 360 = \frac{r}{24} : 2\pi r$$

имеем

$$x = \frac{360}{24 \cdot 2\pi} = \text{около } 2{,}4^\circ.$$

Нужно приучать учеников пользоваться подобными приближенными приемами, дающими часто возможность обходиться не только без тригонометрических таблиц, но и без знания тригонометрии. Учащиеся должны уметь использовать до конца свои геометрические познания и не оставаться беспомощными перед задачами, хотя и не разрешимыми вполне точно доступными им средствами, но допускающими достаточное для практики приближенное решение. (В данном случае вычисление по таблицам дало бы, если ограничиться десятыми долями градуса, тот же результат 2,4°).

20. Вариант. Для русских железных дорог принят предельный уклон в 0,008. Для Закавказской железной дороги допущены, в виде исключения, уклоны до 0,025. Каким углам, в градусной мере, соответствуют эти уклоны?

Отв. Около $^1/_2{}^\circ$ и $1^1/_2{}^\circ$.

21. Можно ли из бревна толщиною в узком конце $9^1/_2$ дюймов выпилить квадратный остроконтный (т.-е. без притупленных углов, „обливин") брус в 7 дюймов ширины?

Решение. Диаметр круга, описанного около квадратного сечения требуемого бруса, равен $\sqrt{7^2+7^2} = 9{,}89$ [1]). Следовательно, из бревна диаметром в 9,5 дюймов такого бруса вырезать нельзя.

22. Обширные огородные площади часто засаживаются без грядок, сплошь, так чтобы растения

[1]) О приемах извлечения квадратного корня — см. далее особый параграф (VIII, 5).

размещались либо на вершинах равносторонних треугольников („сам-третей“), либо на вершинах квадратов. Какая посадка гуще (оценить разницу в %), если взаимное расстояние между растениями в обоих случаях одинаково?

Решение. Эту интересную и нелегкую задачу проще всего решать так. Рассмотрим сначала треугольное расположение (как его начертить? Как выполнить такое построение на местности?). Каждое из трех растений, находящихся на вершине одного треугольника, пользуется $1/3$ площади этого треугольника. Но так как одно растение принадлежит одновременно 6-ти треугольникам, то на каждое растение приходится $1/3$ площади 6-ти треугольников, т.-е. двойная площадь одного треугольника. Обозначив расстояние между растениями через a, имеем для площади одного равностороннего треугольника выражение $\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$, а для двойной площади $\frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$.

Прилагая такие же рассуждения к случаю квадратного расположения, узнаем, что на каждое растение приходится при этом площадь целого квадрата со стороною a ($1/4$ площади 4-х квадратов), т.-е. a^2.

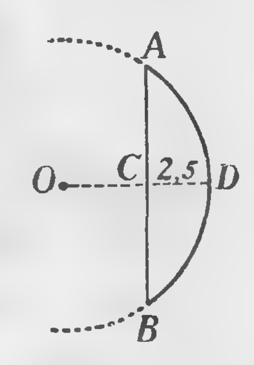
Теперь легко вычислить, что в первом случае на данной площади помещается растений больше в отношении (обратное отношение площадей):

$$a^2 : \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} = 2 : \sqrt{3},$$

т.-е. 1,15 — на 15% больше. Следовательно, при треугольном расположении посев гуще, чем при квадратном, на 15%.

Задачи этого рода дают много пищи геометрической изобретательности, так как к их решению можно подходить с различными, при том не шаблонными приемами. Указанный здесь способ представляется мне наиболее естественным и легким. Числовые данные, относящиеся к посадке или посеву, можно найти в справочных книгах по сельскому хозяйству и лесоводству (см. также приложенные к этой главе справочные сведения).

23. Длина хорды, стягивающей дугу железнодорожного закругления, равна 100 *м*. „Стрелка“ дуги (т.-е. высота соответствующего сегмента) равна 2,5 метра. Найти радиус закругления.



Черт. 3. К зад. № 23.

Решение. Из чертежа 3 видно, что можно вычислить диаметр (2R) дуги, пользуясь тем, что произведения отрезков пересекающихся хорд равны. Из равенства

$$2{,}5\ (2R - 2{,}5) = 50.50$$

имеем $2{,}5R - 6{,}25 = 2\,500$, откуда $R = 51{,}25$.

Эту задачу полезно предлагать в натуре, во время экскурсий, ставя при том вопрос о разыскании центра жел.-дор. закругления. Видоизменением

задачи будет вычисление длины хорды по стрелке и радиусу [1]).

24. Может ли латунная проволока в 2,5 миллиметра толщины выдержать груз в 10 пудов, если предельная нагрузка при растяжении для латуни составляет 400 пуд. на кв. см?

Решение. Площадь сечения проволоки $= \frac{1}{4}\pi\, 2{,}5^2 = 4{,}9$ кв. *мм.* Предельная нагрузка на 1 кв. *мм* — 4 пуда; проволока указанной толщины разрывается лишь при нагрузке 20 пудов и, следовательно, вполне может выдержать груз в 10 пудов.

Располагая данными технического справочника, нетрудно составить много видоизменений этого упражнения. Укажем на следующую любопытную задачу:

25. При какой длине латунная проволока разрывается собственным весом? Куб. см латуни весит 9 граммов.

Решение. Обозначив искомую длину через x, а площадь сечения через b, имеем (принимая 1 пуд = 16 000 граммов):

$$bx \cdot 9 = b \cdot 400 \cdot 16\,000.$$

Откуда, по сокращении на b, находим $x =$ около 7 100 метров. Значит, свободно подвешенная за один конец латунная проволока длиною 7 верст

[1]) Вычисление длины стрелки требует знания квадратных уравнений или же приближенного приема, описанного далее в упражнении 33-м.

должна, при всякой толщине, разорваться (в точке привеса).

26. Согласно русских дорожных правил, щебень на шоссейных дорогах должен укладываться в конические кучи следующих размеров.

высота	окружность
1 арш. 12 вершк.	17 арш. 1 вершк.
1 арш. 7 вершк.	13 арш. 3 вершк.
1 арш. $1^1/_2$ вершк.	10 арш. 13 вершк.

Определить объем таких куч.

Ответ. $^1/_2$ куб. саж., $^1/_4$ куб. саж. и $^1/_8$ куб. саж. — Можно также поставить дополнительные вопросы: какой длины образующая этих конусов; составляет ли она с землей угол больше или меньше 45°; больше или меньше 30°, и т. п.

27. Уменьшенная деревянная модель проектируемого железного сооружения имеет в высоту 20 *см* и весит 240 граммов. Сооружение должно иметь в высоту 30 метров. Определить вес сооружения. Железо тяжеле дерева в 16 раз.

Решение. Сооружение имеет линейные размеры в 3 000 : 20, т. е. в 150 раз большие, чем у модели, и следовательно, объем его больше объема модели в 150^3 раз. Отсюда вес проектируемого сооружения $240 \times 150^3 \times 16 = 12\,939\,000\,000$ граммов = около 13 000 тонн.

28. В цилиндре паровой машины пар давит на поршень с силою 80 фунтов на каждый квадр. дюйм. Диаметр поршня — 14 дюйм. Толщина штока поршня — $1^1/_4$ дюйма. Как велико полное давление пара на поршень?

Решение. Задача, очевидно, сводится к вычислению площади кругового кольца, внешний радиус которого 7 дюймов, а внутренний $^5/_8$ дюйма, и к умножению этой площади на 80.



Черт. 4. К зад. № 28.
Цилиндр паровой машины.

Весьма полезным материалом для геометрических упражнений может служить проверка технических рецептов геометрического характера; учащиеся должны самостоятельно доискаться, на чем основан тот или иной рецепт, и указать, насколько точен результат, получаемый с его помощью. Приведу несколько примеров этого рода.

29. На практике объем бревен часто определяют следующим упрощенным приемом: измеряют в дюймах диаметр бревна посредине, возводят это число в квадрат, умножают на боковую длину бревна в футах и результат делят на число 183. Получается объем в футах. Проверить этот прием, сравнив результат с тем, который получается, если за объем бревна принять объем цилиндра, диаметр которого равен диаметру бревна посередине, а высота — боковой длине бревна.

Решение. Обозначив диаметр бревна в дюймах через d, а длину в футах через l, имеем для объема в футах выражения:

по 1-му способу $\frac{d^2l}{183}$

по 2-му способу $\frac{\pi\, d^2l}{4 \cdot 12^2}$

Разделив первое выражение на второе, получаем, что отношение их $= \frac{576}{183\pi} = \frac{576}{574{,}91} = 1{,}0017$.

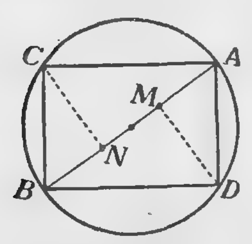
Следовательно, упрощенный прием дает ничтожное преувеличение (менее, чем на 0,2%).

30. Жестяники и столяры нередко пользуются следующим приемом для определения длины окружности: откладывают на прямой 6 раз радиус данной окружности и прибавляют высоту меньшего сегмента, отрезаемого стороной вписанного квадрата. Проверить этот прием.

Решение. Длина окружности получается при этом равной $6r + \left(r - \frac{r\sqrt{2}}{2}\right) = 7r - 0{,}707r = 6{,}293r$, — вместо $6{,}284$. Относительная погрешность $\left(\frac{0{,}009}{6{,}284}\right)$ менее $^1/_7\%$, т.-е. практически ничтожна.

31. Из всех брусьев, какие возможно вырезать из данного бревна, наибольшей прочностью отличается тот, у которого отношение сторон прямоугольного сечения $= 1 : \sqrt{2}$. На практике профиль такого бруса получают следующим образом: делят диаметр бревна на три равные части и в точках деления восставляют, в противоположные

стороны, перпендикуляры до пересечения с окружностью; последние точки соединяют с концами диаметра. Доказать: 1) что при этом получается прямоугольник, 2) что стороны его относятся, как $1:\sqrt{2}$.



Черт. 5. К зад. № 31.

Решение. Первое ясно из того, что углы C и D (см. черт. 5) опираются на диаметр и что $\smile BC + \smile BD = \smile BCA$.

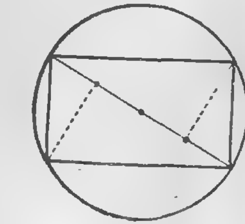
Второе следует из пропорции:

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{AB \cdot BN}{AB \cdot AN} = \frac{BN}{AN} = \frac{1}{2},$$

откуда:

$$BC : AC = 1 : \sqrt{2}.$$

32. Вариант. В балке наибольшей жесткости (дающей наименьший прогиб), какую можно вырезать из данного бревна, стороны прямоугольного сечения должны относиться, как 1 к $\sqrt{3}$. Указать графический способ получения такого профиля.

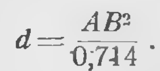

Черт. 6. К зад. № 32.

Решение ясно из чертежа 6-го.

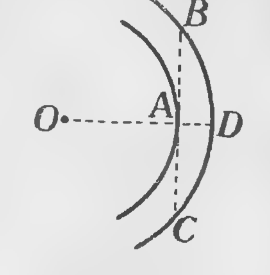
33. Для быстрого определения радиуса закругления уложенного рельсового пути проводят касательную к внутреннему рельсу и измеряют длину отрезка этой касательной, заключающегося между

точками ее пересечения с наружным рельсом. Половину этой длины возвышают в квадрат и делят на ширину колеи (0,714 саж.). Результат дает диаметр дуги закругления в саженях. Проверить это правило.

Решение. Отрезок касательной BC есть хорда окружности закругления наружного рельса. Произведение ее отрезков, т. е. $\overline{AB}^2$ равно произведению стрелки AD на остальную часть диаметра. Но так как диаметр закругления весьма велик по сравнению с длиною AD, то эту часть диаметра можно считать равной всему диаметру (d). Итак $\overline{AB}^2 = AD \cdot d$, откуда



$$d = \frac{AB^2}{0,714}.$$



Черт. 7. К зад. № 33.

Таким образом, указанный прием дает верный результат, если разность $d - 0,714$ мало отличается от d. В действительности диаметр d закругления на наших железных дорогах не допускается меньше 400 сажен, так что $d - 0,714$ отличается от d менее чем на 0,2%. Так как в рассматриваемом случае мы пренебрегаем квадратом [1]) этой величины, то прием можно признать практически достаточно точным.

---

[1]) Из равенства: $\overline{AB}^2 = 0,714\,(d - 0,714)$ имеем

$$AB^2 = 0,714d - 0,714^2,$$

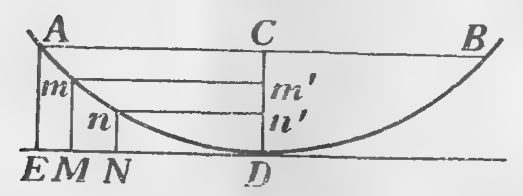
где член $0,714^2$ был нами отброшен.

Этой простой формулой можно пользоваться во всех случаях, когда по хорде дуги и ее стрелке требуется вычислить радиус дуги (если он велик по сравнению со стрелкой. Нам еще придется неоднократно к ней обращаться.

34. По той же формуле можно вычислять (черт. 8) расстояния Mm, Nn точек дуги от касательной, проведенной через середину D дуги. Именно:

$$Mm = Dm_1 = \frac{\overline{mm_1}^2}{2R}$$

$$Nn = Dn_1 = \frac{\overline{nn_1}^2}{2R},$$



Черт. 8. К зад. № 34.

при условии, что отрезки Mn, Nn невелики по сравнению с радиусом. Это дает практический способ разбивки закруглений, т.-е. разметки на местности ряда точек n, m и т. д., через которые должна пройти дуга закругления. Во время экскурсии на открытую местность можно проделать с учениками примерную разбивку закругления заданного радиуса между двумя точками.

К геометрическим упражнениям с техническим содержанием можно присоединить также составление справочных таблиц разного рода или проверку готовых таблиц имеющейся под рукой справочной книги: таблицы веса погонного метра проволоки различной толщины и материала, веса квадратного шестигранного железа, веса металлических листов, веса чугунных шаров, площади сечения труб, толщины бревен для выпиливания брусьев различных размеров, количества семян, требуемых для огорода при определенном размещении растений, [1]) и т. д. Рассмотрим две таблицы, относящиеся к дорожным закруглениям.

35. Ниже приведены некоторые выдержки из таблицы для определения радиуса железно-дорожного закругления по хорде и стрелке. Требуется проверить данные и заполнить места, обозначенные знаками вопроса:

Радиус в сажен.	Стрелка дуги при хорде:	
	10 сажен.	20 сажен.
1000	0,013	0,05
900	0,014	0,056
?	0,023	0,091
300	0,042	?
200	?	?

[1]) Такого рода упражнения в составлении таблиц лучше всего выполнять коллективно, распределяя работу между всеми учащимися, так что на долю каждого выпадет вычисление лишь небольшой части таблицы. Организацию вычислительной работы, — распределение заданий и т. п. — полезно предоставить самим учащимся.

Решение. Рассмотрим, например, 4-ю строку. При хорде 10 саж. и стрелке 0,042 саж., диаметр закругления определяется из уравнения

$$(2R - 0{,}042).\ 0{,}042 = 5^2,$$

откуда

$$2R = \frac{25}{0{,}042} - 0{,}042 = 595.$$

Следовательно, вычисленный радиус закругления, 297,5, весьма близок к табличному числу (300). Полного согласия нельзя ожидать, так как таблица дает слишком мало десятичных знаков. — Проверка и пополнение остальных строк производится тем же способом (можно пользоваться и упрощенной формулой зад. № 33).

36. Сходный материал для упражнений доставляет таблица для разбивки закруглений помощью перпендикуляров к касательной (см. зад. № 34) Приводим несколько выдержек из нее:

Радиусы:	100	300	800	1500
Расстояния от нач. точки кривой по касательной:	ОРДИНАТЫ (т.-е. длина перпендикуляров).			
10	0,50	0,17	0,06	0,03
15	1,13	0,38	0,14	—
20	2,02	0,68	0,25	0,13
50	13,40	4,20	1,56	0,83

Требуется проверить, правильны ли данные этой таблицы.

Решение. Проверку удобнее всего производить по формуле зад. № 33, которая в данном случае примет такой вид:

$$\text{ордината} = \frac{\text{квадр. расст. по касательной}}{\text{диаметр круга}}.$$

Упражнения подобного рода полезны еще и в том отношении, что приучают более сознательно пользоваться разного рода таблицами [1]).

Далее приводятся некоторые сведения из области техники и агрономии, которые легко использовать для составления разнообразных геометрических задач.

---

[1]) Из задач с техническим сюжетом, рассмотренных в этой книге, укажем еще на №№ 3, 4, 13, 114, 116, 135, 136.

Справочные сведения к главе II.

Таблицы удельного веса наиболее употребительных материалов.

1. Металлы.

Алюминий	2,6
Бронза	7,4—8,9
Железо. сталь	6.7—7,9
Золото	19,3
Латунь	8,5
Медь	8.9
Олово	7,3—7,5
Платина	21,4
Ртуть	13,6
Свинец	11,3
Серебро	10.5
Цинк	6,9—7,2
Чугун	6,7—7,8

2. Дерево.

Наименование.	Сухое.	Свежее.
Береза, клен	0,5—0,7	0,8—1,1
Дуб	0,8—1	0,9—1,3
Ель, сосна	0,3—0,7	0,4—1,1
Липа	0,3—0,6	0,6—0,9
Ольха, тополь	0,4—0,7	0,6—1
Пихта	0.4—0,8	0,8—1,3
Пробка	0,24	

3. Разные материалы.

Асфальт	1,1—0,5
Бетон	1,8—2,4
Воск	1
Глина	2
Гранит	2,5—3
Древесный уголь	0,4
Земля сухая	1,6—1,9
Известь	2,5—2,8
Каменный уголь	1,2—1,5
Кирпичная кладка	1,5—1,6
Лед	0,9
Мел	1.8—2,6
Песок	1,5
Сахар	1,6
Снег	около 0,1
Стекло оконное	2,6

4. Жидкости.

Бензин	0,7
Деготь	1,2
Керосин	0,8
Льняное масло	0,9
Молоко	0,03
Смазочное масло	0.9
Спирт	0,8
Скипидар	0,9
Серная кислота	1,84

Числа этих таблиц показывают, во сколько раз материал тяжеле равного объема воды, и в то же время:

1) сколько граммов весит 1 куб. сантиметр материала.
2) сколько тонн весит 1 куб. метр материала.

Прочность материлов.

Материал:	Разрывается при нагрузке на *кв. мм.*
Алюминиевая бронза.	От 50 до 60 *кг.* [1]).
Железная проволока.	Около 40 *кг.*
Медная проволока.	Около 40 *кг.*
Латунная проволока.	От 50 до 60 *кг.*
Хвойное дерево (вдоль волокон).	Около 9 *кг.*
Кожаный ремень.	От 2 до 5 *кг.*

Вес, в килограммах, погонного метра железа квадратного и круглого:

Толщ. или диаметр в *мм.*	Квадратн. железо.	Круглое железо.	Толщ. или диаметр в *мм.*	Квадратн. железо.	Круглое железо.	Толщ. или диаметр в *мм.*	Квадратн. железо.	Круглое железо.
5	0,195	0,153	30	7,002	5,499	100	77,8	61,10
10	0,778	0,611	40	12,45	9,776	120	112,0	88,0
20	3,112	2,444	50	19,45	15,28	150	175,1	137,5
25	4,853	3,819	75	43,76	34,37	175	238,3	187,1

[1]) В зависимости от обработки.

Вес медной проволоки.

Диам. проволоки *мм.*	Вес 100 метров.	Число метров в 1 *кг.*
0,1	0,007	14 286
0,5	0,175	571
1.0	0,699	142,9
1,5	1,573	63,3
2,0	2,796	35,7
2,5	4,369	22,9
3,0	5.292	15,9
4,0	11,180	8,9
5,0	17,480	5,7
10,0	69,91	1,4

Кровельные работы.

Железная кровля.

На покрытие 1 кв. саж. крыш (со включением надстенных жолобов, карниза и покрытия около труб) требуется:

Желсза 2 арш., 13 фунт., листов . 5,6
Гвоздей кровельных, 3 дюймов., пудов 0,009
Железа весом, пудов 1,82
Олифы, фунтов 0,4
Кровельщиков 0,45

Листовое (кровельное) железо:

Размеры 2 × 1 арш. Вес — от 6 до 14 фунтов.

Заводские трубы.

Высота трубы (над решеткою топки) в футах	60	75	90	100	125	150	180
Верхний внутренний диаметр в футах .	$1^1/_2$	$1^2/_3$	$1^5/_6$	2	$3^1/_2$	$4^1/_2$	6

Толщина стенки вверху—от $^1/_2$ кирпича до 1 кирпича.

" " книзу —на каждые $2^1/_2$ — 4 саж. увеличивается на полкирпича.

Внутренний уклон . . . от $^1/_{150}$ до $^1/_{120}$ высоты.

Наружный уклон . . . . от $^1/_{40}$ до $^1/_{60}$ высоты.

Комнатные печи.

	Размер печи в плане, в вершках.	Высота печей в аршинах.	Объем помещений, ими отапливаемых, в куб. саж.
Прямоугольный план.	12 × 12	$3^1/_2$	6,72
	12 × 15	$3^3/_4$	17,6
	15 × 18	$3^3/_4$	21,3
	18 × 18	$3^3/_4$	25,58
	21 × 21	$3^3/_4$	34,8
Круглые печи.	15	$3^3/_4$	13,9
	18	$3^3/_4$	20,07
	20	$3^3/_4$	24,8
	24	$3^3/_4$	40,6

Для кладки прямоугольных комнатных печей полагается на каждый куб. аршин печи (без вычета объема дымоходов): кирпича 875 шт., глины и песку по 0,11 куб. саж. Для устройства круглых печей нужно на куб. аршин: кирпича 110 шт., глины и песку по 0,013 куб. саж. Для сделания и окраски футляра на каждый кв. арш. поверхности нужно: кровельного железа 2-аршинного—0,64 листа и краски — 0,13 фунта.

Русские железные дороги.

Ширина земляного полотна: для одного пути 2,6 саж., для двух — 4,6 саж.

Откосы насыпей и выемок: обычно полуторные (основание в $1^1/_2$ раза больше высоты).

Вес рельса: 1 погонного метра — 43,6 *кг*, 38,4 *кг*, 33,5 *кг* или 30,9 *кг* (в зависимости от типа).

Нормальная длина рельса: 35 фут., 42 фут., или 49 фут.

Ширина колеи (расстояние между внутренними гранями головок): 5 фут., (1,514 *м*). В кривых частях колея уширяется (уширение до 3 *см*).

Наибольшая скорость движения: пассажирских 60 — 80 *км* в час, товарных — 45 *км*.

Кривые части на главном пути не должны иметь радиуса меньше 300 саж. (в ровной местности) — обыкновенно от 500 до 1000 саж.

Продольные склоны не должны превышать 0,008 (т.-е. понижение или подъем не должен быть больше 0,008 саж. на каждую сажень пути). Обозначение уклона: 0,005/150 показывает, что на

протяжении 150 сажен пути понижение равно 0,005 × 150 = 0,75 сажени.

Телеграфная линия. Проволока железная толщиною 5 *мм.* Столбы, в количестве 20 на версту, высотою 4 сажени, в верхнем отрубе 4 вершк. Первый провод подвешивается на расстоянии 24 дюймов от верхушки столба, остальные на расстоянии 36 дюймов друг от друга.

Паровоз — длина (между буферами): 9,3 *м.*

Тендер — длина (между буферами): 6,8 *м.*

Вагон — товарный: длина кузова: 6 — 6,7 *м.*; между буферами 7,6 *м.*

Количество семян на десятину и урожайность.

	Количество семян на десятину в четвериках при посеве:		Урожайность с десятины в четвертях.
	Вразброс	Рядами	
Рожь озимая	8 — 11	6 — 9	6 — 14
„ яровая	6 — 9	5 — 7	5 — 11
Пшеница озимая	6 — 11	5 — 9	9 — 18
„ яровая	8 — 13	7 — 10	6 — 13
Ячмень озимый	9 — 13	8 — 11	18 — 27
„ яровой	10 — 13	9 — 11	12 — 22
Овес	12 — 21	9 — 17	12 — 34
Просо	1 — 2	3/4 — 1	7 — 14
Гречиха	5 — 9	3 — 5	7 — 14
Горох средний	9 — 11	7 — 11	7 — 14
Картофель средний	—	70 — 100	700 — 1600
Брюква	—	21 — 32	1300 — 3300
Морковь	—	10 — 16	1600 — 3200

Число саженцев, приходящихся на 1 десятину при посадке.

Расстояние между сажeнцами.	Квадратная посадка.	Посадка сам-третей.	Посадка сам-пят.
1/2 аршина	86 400	99 792	172 800
1 аршин	21 600	24 948	43 200
1 1/2 аршина	9 600	11 088	19 200
2 аршина	5 400	6 238	10 800
2 1/2 аршина	3 456	3 992	6 912
3 аршина	2 400	2 772	4 800
3 1/2 аршина	1 763	2 036	3 527

При квадратной посадке растения размещаются на вершинах квадратов; при посадке сам-третей — на вершинах равносторонних треугольников; при посадке сам-пять (или шахматной) — на вершинах квадратов и в центре их.

IV.

Задачи из географии и землеведения.

37. Какого диаметра должен быть глобус, чтобы одна минута его меридиана равнялась 1 миллиметру? Во сколько раз его диаметр меньше диаметра Земли?

Решение. 360. 60 : $2\pi = 6\,879$. Искомый диаметр = 6,88 метрам.

Другое решение. Так как минута меридиана (морская миля) = 1 852 метрам (вычислить это исходя из того, что метр = 40-миллионной доле меридиана), то диаметр нашего глобуса меньше диаметра земного шара в 1 852 000 раз.

38. Землетрясения распространяются по земной поверхности со скоростью до 800 метров в секунду. Какую площадь может охватить землетрясение через 1 минуту после своего возникновения (кривизны земной поверхности в расчет не принимать).

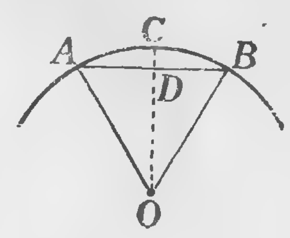
Решение. $\pi(800.\ 60)^2 = 7\,235$ кв. километров.— Полезно также вычислить величину дуги (в градусной мере), которая при этом расчете принималась за прямую линию, чтобы оправдать приравнение в данном случае длины дуги длине хорды.

39. „Относительным развитием береговой линии“ материка или острова называется в географии отношение длины береговой линии к длине окружности круга, равновеликого данному материку или острову. — Определить относительное развитие береговой линии Австралии; длина ее береговой линии — 20 000 *км*, площадь — 7 600 000 кв. километров.

Ответ. Почти 2.

40. Определить относительное развитие береговой линии Европейско-Азиатского материка (см. пред. задачу). Береговая линия его 108 000 *км.*, площадь — 50 700 000 кв. *км.*

Ответ. 4,2.



Черт. 9. К зад. № 41.

41. Две точки поверхности Великого океана, лежащие на экваторе в 60° одна от другой, соединены прямой линией. Проходит ли эта линия целиком в воде, или частью расположена под дном океана? (Наибольшая глубина Великого океана не превосходит 10 *км*). Какую форму имеет в общем дно этого океана — вогнутую, плоскую или выпуклую? Радиус земного шара 6400 *км.*

Решение. Первая часть задачи сводится к вычислению стрелки дуги в 60° при радиусе 6 400 *км*, т.-е. к определению разности между радиусами круга: описанного около 6-угольника

и вписанного в него. Она равна $r - \frac{1}{2} r \sqrt{3} = \frac{1}{2} r (2 - \sqrt{3}) = 0{,}134 r = 857{,}6$ *км.* Следовательно, наиболее глубокая часть нашей хорды залегает на сотни верст глубже дна океана. — Отсюда само собою вытекает, что дно океана должно иметь выпуклую форму.

В связи с этой задачей поучительно рассмотреть такой вопрос:

42. Какова форма дна — выпуклая или вогнутая — у моря, простирающегося по меридиану (или по дуге большого круга) на 5° и имеющего равномерную глубину 200 метров? (Длину хорды, стягивающую дугу в 5°, можно для приближенных вычислений принять равной длине дуги). — Каково должно быть протяжение моря по меридиану, чтобы, имея наибольшую глубину посередине в 100 метров, оно могло иметь *плоское* дно?

Решение. Прежде всего надо показать, что длину хорды, стягивающей дугу в 5°, можно без ощутительной погрешности принять равной длине соответствующей дуги. В таблицах (напр. в некоторых логарифмических) можно найти длину хорды в 5° при радиусе, равном 1-це: она составляет 0,0872 радиуса. Длина же дуги в 5°, по вычислению, равна 0,0873 радиуса. Разница ($^1/_{872} = 0{,}11\%$) настолько мала, что в расчетах, подобных нашему, можно ею пренебречь [1]).

[1]) Полезно вообще обратить внимание учащихся на то, как мала разница между длиною дуги и длиною соответствующей хорды даже для углов большей величины:

Град.	Длина дуги	Длина хорды
10°	0,1745	0,1743
20°	0,3491	0,3473
30°	0,5236	0,5176
45°	0,6854	0,7654
60°	1,0472	1,0000

(Для дуги в 30°, 45° и 60° вычисление может быть выполнено учащимися геометрически, без обращения к таблицам).

Легко видеть, что для дуги в 10° разница составляет менее 0,12%; для 20° — 0,5%; для 30° — 1,1%; для 45° — 2.5% и даже для 60° — менее 5%.

Приступая затем к решению задачи (первый вопрос), вычислим, как низко залегала бы под свободной поверхностью воды самая глубокая точка морского дна, если бы дно это было плоско, — т.-е. вычислим стрелку дуги земного меридиана в 5°. Так как длина соответствующей хорды составляет 0,087 земного радиуса (6 400 *км*), т.-е. равна 556,8 *км*, то стрелка равна $278{,}4^2 : 12\,800 =$ около 6 *км* (вычисляем по формуле задачи № 33). Зная, что рассматриваемое море имеет равномерную глубину в 200 метров, заключаем, что дно его в средней части значительно возвышается над прямой линией, соединяющей его края, т.-е. что оно выпукло.

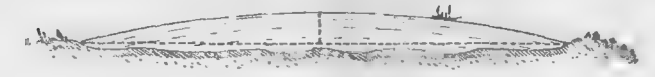
Ответ на второй вопрос задачи получается из формулы

$x^2 = 100\ (12\,800\,000 - 100)$; откуда $x =$ около 36 *км*.

При большем протяжении моря по меридиану (или вообще по дуге большого круга) дно его должно быть выпуклым.

43. Подобными приемами можно проверить следующие данные („Курс физической географии" проф. П. И. Броунова):

„Ширина Черного моря, между южной оконечностью Крыма и Инеболи в Малой Азии, 2°10′; чтобы дно здесь было плоским, необходимо, чтобы наибольшая глубина была 2 628 метров [1]). В действительности же она на этом меридиане 2 240 метров. Следовательно, между Крымом и Малой Азией дно Черного моря почти плоское, едва выпуклое. Даже такие глубокие моря, как Сулу [730 метров] и



Черт. 10. К зад. № 44. Водная выпуклость озера.

Целебесское [1 640 *м*] имеют выпуклое дно. Ширина Па-де-Кале 32 километра [соответствующая дуга — 18′]; дно пролива было бы плоским при глубине 19 метров, но последняя 62 метра, – следовательно оно вогнутое".

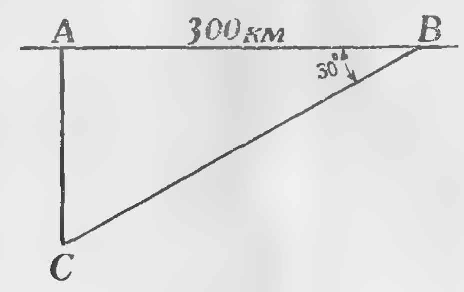
44. Вычислить наибольшее возвышение водной выпуклости озера над линией, соединяющей две противоположные точки берега, расположенные в расстоянии 130 *км* друг от друга (устья Вуоксы и Олонки на Ладожском озере).

Ответ. 325 метров (выше Эйфелевой башни).

45. Средняя глубина всех океанов—4 километра. Зная, что океаны покрывают 70% общей поверхности земного шара, найти объем всей воды океанов.

[1]) Черное море отличается равномерной глубиной.

Решение. Исходя из определения метра (40-миллионная доля меридиана) имеем, что радиус земного шара $= \frac{40000}{2\pi}$ *км.*, а общая поверхность $4\pi \left(\frac{40000}{2\pi}\right)^2 = 508\,800\,000$ кв. *км.* 70% этого числа, т. е. 356 160 000, умножаем на 4 и получаем искомый объем: 1 424 640 000 куб. *км.*



Черт. 11. К зад. № 47.

46. Какого диаметра шар образовался бы из воды всех океанов?

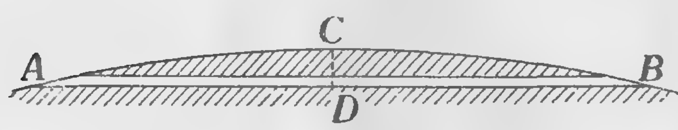
Ответ. Около 650 *км.*

47. Во время землетрясений измеряют помощью особых приборов тот угол, под которым в данном месте подземный толчок встретил горизонтальную поверхность земли („угол выхождения"). Допустим, что в *некотором случае* этот угол равнялся 30°, а место вершины угла было удалено на 300 километров от того места на земной поверхности, где землетрясение началось раньше всего (оно называется „эпицентром"). Определите, как глубоко

под земной поверхностью залегает тот очаг, из которого исходили в указанном случае подземные толчки. (Предполагается, что в толще коре толчок распространяется прямолинейно).

Решение. Обозначив (черт. 11) вершину угла в 30° через B, эпицентр — через A, а очаг — через C, имеем, что искомая глубина залегания очага

$$AC = x = \frac{BC}{2}.$$



Черт. 12. К зад. № 48. Туннель между точками A и B.

По теореме Пифагора,

$$300^2 + x^2 = 4x^2,$$

откуда

$$x = \sqrt{30000} = 173{,}2 \text{ километра.}$$

48. Туннель прорыт по прямой линии и имеет в длину 15 километров (Симплонский — 20 километров). Вычислить глубину залегания его средней точки под горизонтальной линией, проведенной через его концы.

Решение. Глубина залегания CD (черт. 12) вычисляется из равенства:

$$CD = \frac{DB^2}{2R} = \frac{7{,}5^2}{12800} = \text{около 44 метров.}$$

Следует воспользоваться случаем отметить, что линия AB не горизонтальна и что близ выходов A и B тунель наклонен к горизонту (среднее падение легко вычислить — 0,0026). Вода будет втекать в такой туннель и застаиваться в его середине у точки D. Поэтому в действительности длинные туннели роют не по хорде, а по двум касательным в его конечных точках.

49. „При обыкновенном дожде вес капель не превышает 0,065 грамма. Визнер на острове Яве во время сильнейшего дождя определил средний вес капель в 0,16 грамма“ (Клоссовский, Основы метеорологии). Определить соответствующие этим данным поперечники дождевых капель, считая их форму строго шарообразной. Куб. *см* воды весит 1 грамм.

Решение. 0,065 грамма воды занимают объем 0,065 куб. *см* или 65 куб. миллиметров. Диаметр шара такого объема получаем из уравнения:

$$\frac{1}{6}\pi x^3 = 65,$$

где x — величина диаметра в миллиметрах. Отсюда

$$x = \sqrt[3]{\frac{6.65}{\pi}} = \text{около 5 миллиметров.}$$

Итак, крупная дождевая капля имеет в ширину полсантиметра. Диаметр самых больших измеренных капель (вес 0,16 грамма) равен 6,7 миллиметра.

50. При охлаждении насыщенного водяного пара от 15° до 14° один кубический метр его выделяет 0,75 граммов воды. Принимая, что образующиеся при этом капли имеют в диаметре 0,5 миллиметра, вычислить, сколько капель выделяет при таком охлаждении каждый кубический метр воздуха, насыщенного водяным паром.

Решение. Объем капли $= \frac{1}{6}\pi \cdot 0,5^3 = \frac{1}{6} \cdot 3,14 \cdot 0,125 = 0,065$ *кб. мм.* Вес такой капли 0,065 миллиграмма. Искомое число капель получим делением 0,75 граммов на 0,065 *мг.* Имеем 11 000 капель.

(Толщина дождевых облаков измеряется сотнями метров, так что из каждого квадратного метра нижней поверхности такого облака выпадают миллионы капелек).

51. „Порозность (скважность) почв является результатом неплотного прилегания частиц почвы друг к другу, вследствие чего между ними остаются большей или меньшей величины промежутки, или поры. Если представить себе, что почвенные частицы имеют вид шаров одинакового размера, то в определенном объеме эти частицы могут быть расположены так, что объем промежутков между шарами будет наибольший (рыхлое сложение), или наименьший (плотное сложение). В первом случае шары каждого верхнего ряда будут соприкасаться с шарами нижнего ряда верхушками, во втором — каждый шар верхнего ряда помещается [частью] в промежутке, образованном двумя шарами нижнего ряда[1])“. — Вычислить, какой процент общего объема почвы должен составлять объем пор при наиболее рыхлом сложении?

Решение. Задача сводится к вычислению отношения объема шара к объему описанного куба; искомая величина будет найдена вычитанием этого отношения из 1-цы:

$$\frac{1}{6}\pi d^3 : d^3 = \frac{\pi}{6};\ 1 - \frac{\pi}{6} = 1 - 0,524 = 0,476 = 47,6\%.$$

[1]) Проф. К. Д. Глинка, „Почвоведение“.

В качестве других тем для несложных геометрических задач из области географии можно указать на черчение в заданном масштабе различных географических расстояний, протяжений, высот; вычисление расстояний двух пунктов земной поверхности, расположенных на одном меридиане, если известна разность широт, или на одной параллели (60°, 45°, 30°), если известна разность долгот; решение обратных задач — вычисление разности широт или долгот по расстояниям; вычисление линейной скорости движения точек экватора и параллелей (60°, 45°, 30°) в суточном вращении земного шара; графическое изображение сравнительных размеров материков, морей, численности населения и т. п.

Некоторые числовые данные для составления задач рассматриваемого рода приводятся ниже.

Справочные сведения к главе IV.

Земля.

Длина окружности: 40 000 *км.*

Средний радиус: 6 370 *км.*

Длина градуса меридиана: 111,1 *км.*

Поверхность: 510 миллионов *кв. км.*

Объем: 1 083 миллиарда *куб. км.*

Средняя плотность (по отнош. к воде): 5,52.

Масса: 5 979 триллионов тонн.

Среднее расстояние от Солнца: 149,5 миллион. *км.*

Время обращения: 365 дн. 6 ч. 9 м. 10 сек.

Средняя скорость движения по орбите: 29,8 *км* в сек.

Скорость движения точки экватора: 465 *м* в сек.

Продолжительность суток (средняя солнечная): 86 400 сек.

Наклон эклиптики: 23°27′.

Части света и океаны.

Части света (с островами) и океаны (с морями).	% поверхности земного шара.	% поверхности суши (океана) в отдельности.	Площадь в квадратных километрах.	Наибольшая высота суши; наибольшая глубина океанов, в метрах.	Средняя высота материков над уровнем океанов; средняя глубина океанов в метрах.	Среднее содержание солей в воде океанов.	Высота атмосферных осадков в сантиметрах.	Общее количество влаги, выпадающей в виде осадков — в кубических километрах.
Европа	1,95	7,27	9 923 700	4 810 (Монблан).	317	—	61,5	6 103
Азия	8,68	32,44	44 275 100	8 882 (Эверест).	957	—	55,5	24 573
Африка	5,86	21,89	29 886 900	5 890 (Килиманджаро).	612	—	82,5	24 657
Америка	7,69	28,75	39 222 900	С. 5 520 (Элиас). Ю. 7 040 (Аконкагуа).	С.—622 Ю.—617	—	115,7	45 390
Австралия и Полинезия	1,76	6,57	8 962 600	4 210 (Мауна-Кеа).	240	—	52,0	4 661
Полярная область	0,83	3,1	4 228 700	—	—	—	34,0	1 438
Вся суша	26,8	100	136 500 000	288 482	735	—	78,2	106 820
Тихий океан	34,3	47	175 000 000	9 780	4 020	3,5%	—	—
Атлантический	17,6	24	89 860 000	8 340	4 380	3,3%	—	—
Индейский	14,6	20	74 890 000	6 205	3 675	—	—	—
С. и Ю. Ледовитые	6,6	9	33 700 000	С.—4 846 Ю.—7 315	С. —1 500 Ю.—3 000	3,3%	—	—
Все океаны и моря	73,2	100	373 500 000	9780	3 800	3,44%	—	—

Развитие береговой линии

(определяется—по способу Нагеля—отношением длины берега к длине окружности круга, площадь которого равна площади суши).

Материки.	Площадь в кв. км.	Длина берег. линии в км.	Развитие береговой линии.
Европа	9 212 000	37 900	3.55
Азия	41 480 000	69 900	3,19
Африка	29 205 000	30 500	1,64
Австралия	7 601 000	19 500	2,01
Сев. Америка	19 982 000	75 500	4,86
Южн. Америка	17 629 000	28 700	1,96

Высота гор (в километрах).

В Европе:		В Азии:	
Монблан	4 810[1]	Эверест	8 882[2]
Этна	3 274	Монт-Дуплекс	8 000
Олимп	2 985	Пик-Кауфман	7 000
Роман Кош (Крым)	1 518	Эльбрус	5 630
Брокен	1 141	Дыхтау	5 200
		Казбек	5 040

[1]) В конце 1920 г. вершина Монблана обрушилась, и какова его высота в настоящее время (до новых измерений)—неизвестно.
[2]) По данным 1922 г.

В Азии:		В Америке:	
Ключевск. сопка	4 920	Аконкагуа	7 040
Фуй-но-яма	3 780	Ампато	7 000
Белуха	3 350	Чимборазо	6 310
		Кинлей	6 240
В Африке:		Элиас	5 520
		В Австралии:	
Килиманджаро	5 890	Мауна Кеа	4 210
Кения	5 520	Оуен Стенли	4 010
Меру	4 730	Кук	3 770

Площадь озер (в кв. километрах).

Европа:		Африка:	
Ладожское	18 150	Виктория Ниапза	68 500
Онежское	11 380	Танганайка	351000
Сайма	1 710	Чад	39 000
Женевское	582		
		Америка:	
Азия:		Верхнее	81 380
Каспийское море	438700	Мичиган	66 280
Аральское	67 960	Гурон	62 000
Байкал	34 200	Эри	26 000
Мертвое море	914	Онтарио	8 330

Ладожское озеро.

Простирается между 59°51′—61°46′ с. ш. и 29°38′—32°58′ в. д. Наибольшую длину, 194,5 вер., имеет по меридиану; наибольшая ширина — на параллели 61°—между устьями Вуоксы и Олонки: 122,5 верст. Длина береговой линии 1 070 верст: Средняя глубина озера 48,2 *м*, наибольшая—264 *м*. Объем воды озера—726,6 куб. верст.

Некоторые расстояния.

Расстояние до ближайшей звезды (α Центавра): 4,5 свет. года [1].
Расстояние до Солнца: 149,5 миллионов *км*.
„ до Луны (среднее): 384 400 *км*.
Высота светящихся облаков: 80 *км*.
Высший подъем шара-зонда: 29 *км*.
Высший полет на аэроплане: 12 440 *м*.
Средняя высота перистых облаков: около 9 000 *м*.
Высочайшая горная вершина (Эверст): 8 882 *м*.
Средняя высота суши: 735 *м*. [2]).

[1]) „Световый год"—путь, проходимый светом в 1 год (скорость света — 300 000 *км* в секунду); он равен 9,5 биллионов километров.

[2]) Такой высоты над уровнем моря была бы вся суша, если бы поверхность ее была уравнена.

Глубочайшее место в океане [1]): 9 780 *м*.
Средняя глубина океанов: 4 *км*.
Глубочайшая буровая скважина [2]): 2 240 *м*.
Высочайшее здание (Эйфелева башня): 300 *м*.

[1]) У восточных берегов Филиппинских островов.

[2]) В м. Чухов, в Силезии.

V.

Задачи из мироведения.

52. Земля и Марс обращаются вокруг Солнца по почти круговым путям на расстоянии 150 и 230 миллионов километров. Во сколько раз при наибольшем приближении к Земле Марс ближе к нам, чем при наибольшем его удалении от нас?

Решение: $380:80=4{,}8$. Результат лишь приблизительно верен, так как в действительности орбиты планет не круги, а эллипсы, имеющие общий фокус.

53. В связи с этим можно поставить вопрос о пределах видимой величиины диска Марса, зная, что истинный диаметр этой планеты равен 0,54 земного.

Решение. Так как видимая величина диска планеты есть угол, под которым виден этот диск с Земли [1]), то задача сводится к вычислению центрального угла дуги в 6 900 километров (диаметр Марса) при радиусе 80 000 000 и 380 000 000 *км*. Получающиеся результаты 18″ и 3,8″ верны не

[1]) Об угловой величине — см. также гл. VIII, 1.

вполне, особенно первый, так как в действительности, вследствие эллиптичности орбит, Марс в ближайшем к Земле положении находится от нее не в 80, а в 60 миллионах километров (и тогда для наибольшей видимой величины получается 26″). Тем не менее, задача весьма поучительна, так как дает представление о том, какими простыми приемами могут быть получены важные астрономические данные. Еще поучительнее обратная задача:

54. Юпитер обращается вокруг Солнца на большем от него расстоянии, нежели Земля. Диск этой планеты виден с Земли под углом, который, в зависимости от положения Юпитера, изменяется от 46″ до 31″. Во сколько раз Юпитер дальше от Солнца, нежели Земля?

Решение. Обозначив расстояние Земли от Солнца через x, а Юпитера через y, и принимая во внимание, что угловая величина предмета обратно пропорциональна его расстоянию от наблюдателя, составляем пропорцию:

$$\frac{y+x}{y-x}=\frac{46}{31};$$

откуда, пользуясь свойством производных пропорций, имеем:

$$\frac{2y}{2x}=\frac{46+31}{46-31};$$

значит, искомое отношение

$$\frac{y}{x}=\frac{77}{15}=5{,}1.$$

Мы узнали, что Юпитер обращается вокруг Солнца на расстоянии, в среднем, впятеро большем, чем Земля. Зная расстояние Земли от Солнца, нетрудно поэтому вычислить среднее расстояние Юпитера, а также его истинный диаметр (и, конечно, его поверхность и объем).

Следует обратить внимание учащихся, что одни измерения угловой величины диска Юпитера (самой большой и самой малой) уже дают возможность вычислить отношение радиуса его орбиты к радиусу земной орбиты, даже если абсолютная величина последнего неизвестна. Тогда учащимся станет понятно, почему взаимные отношения расстояний планет от Солнца стали известны астрономам значительно раньше, чем удалось измерить расстояние Земли от Солнца.

Что касается этого последнего расстояния, то способ определения его можно до известной степени выяснить на следующей задаче:

55. Астрономами определен (косвенными приемами) угол, под которым земной шар должен усматриваться с Солнца [1]): он оказался равным 17,6″. Принимая диаметр Земли равным 12 800 *км*, вычислить среднее расстояние от Земли до Солнца.

Решение. Длина дуги в 12 800 *км*, заключающей 17,6″, соответствует длине полной окружности в

$$\frac{12800 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 360}{17{,}6}\ \text{км},$$

[1]) Половина этого угла носит в астрономии название „солнечного параллакса".

откуда радиус этой дуги (т.-е. искомое среднее расстояние) равно

$$\frac{12800 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 360}{17{,}6 \cdot 2\pi} = \text{около 146 миллионов км.}$$

Более точный результат 149 500 000 *км*, получается, если выполнить вычисление, взяв для диаметра Земли — 12 740 *км*.

56. Диск Солнца усматривается с Земли в среднем под углом в 32″. Зная расстояние Земли от Солнца — 150 миллионов километров — вычислить величину истинного диаметра Солнца.

Решение. Вопрос сводится к вычислению длины дуги в 32′ при радиусе в 150 000 000 *км*. Полная окружность такого радиуса $= 2\pi \cdot 150000000$, а дуга в 32′ =

$$= \frac{2\pi \cdot 150000000 \cdot 32}{360 \cdot 60} = 1\,390\,000\ \text{км}.$$

Отсюда нетрудно определить также поверхность и объем Солнца.

Много материала для геометрических упражнений дает вычисление обстоятельств, связанных с затмениями. Рассмотрим здесь только некоторые из задач этого рода.

57. Диаметр Солнца больше диаметра Земли в 109 раз. Среднее расстояние от Земли до Солнца 150 000 000 километров. Определить длину тени, отбрасываемой земным шаром.

Решение. Длину CE конуса земной тени, считая от центра Земли (черт. 13), находим из пропорции:

$$\frac{CE}{CS} = \frac{BE}{AS} = \frac{1}{109}.$$

Обозначим CE через x; тогда $CS = CE + ES = x + 150000000$. Следовательно, пропорция принимает вид

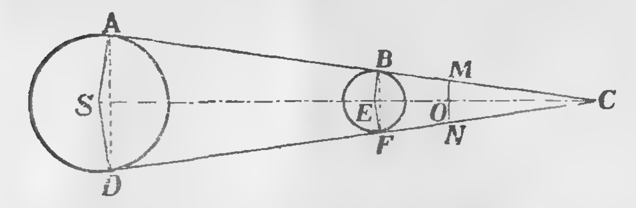
$$\frac{x}{150000000 + x} = \frac{1}{109},$$

откуда

$$x = \frac{150000000}{108} = 1\,388\,000.$$

Итак, длина земной тени, считая от центра Земли, 1 388 000 километров [1]).

Зная это, можно приступить к следующей задаче:



Черт. 13. К зад. № 57. Вычисление длины земной тени.

58. Определить ширину земной тени в том месте, где в моменты затмений в нее вступает Луна. Луна обращается вокруг Земли на среднем расстоянии 380 000 километров от центра Земли.

Решение. Обозначив искомую ширину MN тени через x и принимая диаметр Земли равным

---

[1]) Другой способ вычисления длины земной тени указан далее (VIII,1).

12 700 *км* (угол BEF весьма близок к 180° — почему?), имеем пропорцию:

$$\frac{x}{12700} = \frac{EC - EO}{EC} = \frac{1388000 - 380000}{1388000},$$

откуда $x = 9400$ *км*.

Так как диаметр Луны = 3 500 *км*, то ширина полной тени раза в $2^1/_2$ более ширины Луны, и последняя может погрузиться в нее целиком. Зная, что Луна совершает полный оборот в $27^1/_3$ суток, нетрудно вычислить и среднюю продолжительность полной фазы лунного затмения, т.-е. время пребывания Луны в полной тени ($2^3/_4$ часа).

Можно вычислить также и ширину полутени Земли (ограниченной внутренними касательными к Солнцу и Земле) на расстоянии 360 000 *км* и таким образом определить среднюю продолжительность всего лунного затмения от момента первого соприкосновения лунного диска с полутенью до выхода его из полутени.

Из других относящихся сюда упражнений упомянем: вычисление длины лунной тени в связи с общими условиями солнечного затмения; вычисление длины теии Юпитера в связи с затмениями спутников; длины тени Марса также в связи с затмениями его спутников; вычисление длины тени Юпитеровых и Марсовых спутников и разрешение вопроса о возможности на этих планетах солнечных затмений.

Темами для геометрических задач могут служить, далее, рассчеты, относящиеся к объему и поверхности планет. Например:

59. Каков диаметр планеты (астероида), поверхность которой равна поверхности Петрограда (91 кв. километров).

Ответ 5,39 *км*.

60. Во сколько раз Солнце по объему превосходит объемы всех планет, вместе взятых? Диаметр Меркурия составляет 0,4 земного, Венеры — равен земному, Марса — 0,5, Юпитера — в 11 раз больше земного, Сатурна в 9 раз больше, Урана — в 5 раз больше, Нептуна в 4 раза больше, а Солнца — в 109 раз больше.

Ответ. В 578 раз.

61. Известно около 1000 малых планет (астероидов), обращающихся между Марсом и Юпитером. Высказывалось предположение, что все они появились в результате разрушения одной планеты. Вычислить диаметр этой предполагаемой планеты, принимая, что средний диаметр астероидов — 50 *км* и что нам известна только десятая часть всех существующих астероидов.

Решение. Шар, объем которого в 10000 раз больше объема шара с диаметром 50 *км*, должен иметь диаметр в $\sqrt[3]{10000}$ раз больше, т. е. $50 \cdot 21,54 = 1\,077$ километров (в $3^1/_2$ раза меньше лунного).

В заключение, остановимся на следующей интересной задаче (сообщенной мне проф. А. В. Цингером).

62. Вообразим, что земной шар вытянут в цилиндрическую нить длиною от Земли до Солнца. Какой толщины была бы эта нить?

Решение. Ответ — для большинства неожиданный — получается из уравнения:

$$\frac{1}{4}\pi\ x^2 \,.\, 150000000 = \frac{1}{6}\pi\, 12700^3,$$

откуда $x = 95,25$ *км*. Нить имела бы в толщину около 100 верст!

Справочные данные о Солнце, Луне, планетах и звездах приведены в прилагаемых таблицах [1]).

Справочные сведения к главе V.

Солнце.

Угловая величина диаметра Солнца:

в январе: . . . . 32′ 32″
в июле: . . . . 31′ 28″
на средн. расстоянии . . 31′ 59″

Среднее расстояние от Земли: 149,5 миллионов *км*.
Истинный диаметр Солнца: 1 391 000 *км*.
Длина окружности: 4 370 000 *км*.
Поверхность: 6 079 миллиардов *кв. км* (в 12 000 раз больше поверхности Земли).

---

[1]) Укажем также на относящиеся к рассматриваемому отделу задачи этой книги: 89, 90, 93, 113, 115.

Объем: 1 409 000 биллионов *кв. км* (в 1 300 000 раз больше объема Земли).

Плотность: около 1,4 (в 4 раза менее плотности Земли).

Масса: в 330 000 раз больше массы Земли.

Время вращения вокруг оси: около 25 дней.

Радиус Земли виден с Солнца под углом: 8,8″.

Земля.

Расстояние звёзд.

	Годичный параллакс [1]).	Расстояние в световых годах [2]).
Сириус (созв. Больш. Пса) . .	0,32″	9,8
Альдебаран (созв. Тельца) . .	0,21″	13,9
Альтаир (созв. Орла)	0,19″	17,8
Вега (созв. Лиры).	0,15″	21,7
Капелла (созв. Возничего) . . .	0,11″	29,6
Полярная (созв. М. Медведицы).	0,07″	47,5

Луна.

Угловая величина диаметра (средняя): 31′ 6″.

Среднее расстояние от Земли: 384 400 *км* (60,3 радиуса земного шара).

[1]) Угол, под которым усматривается с звезды радиус земной орбиты.

[2]) Световой год — путь, проходимый светом в течение года.

Истинный диаметр: 3 477 *км* (0,27 диаметра Земли).

Объем: 22 000 миллионов *кв. км* (0,02 объема Земли).

Масса: $^{1}/_{81}$ массы Земли.

Плотность: около 3,3 (0,6 плотности Земли).

Продолжительность обращения вокруг Земли (сидерический месяц) 27 дн. 7 ч. 43 м. 11 с.

Спутники Юпитера и Марса.

Спутники Юпитера.	Расстояние от центра планеты.	Период обращения.	Истинный диаметр.
I	421.430 *км*	1,77 земных суток.	3950 *км*
II	670.520 *км*	3,55 земных суток.	3290 *км*
III	1.069.550 *км*	7,15 земных суток.	5730 *км*
IV	1.881.130 *км*	16,69 земных суток.	5380 *км*
Спутники Марса.			
Фобос . . .	9150 *км*	0,318 сут. [1])	около 10—12 *км*
Деймос. . .	22850 *км*	1,262 сут. [2])	около 10—12 *км*

[1]) 7 час. 39 м.

[2]) Около 30 час. 18 м.

Планеты.

Названия планет.	Средн. расстояние от Солнца в миллион. *км.*	Среднее расстояние от Солнца в радиус. земной орбиты.	Время обращения вокруг Солнца.	Диаметр в радиусах земн. шара	Масса по отношению к Земле.	Скорость движения по орбите.	Угловой диаметр в секундах.
Меркурий .	58 мил. *км.*	0,39	88 сут.	0,37	0,056	47,6 *км.*	12,2″—4,4″
Венера . . .	108 „ „	0,72	225 „	0,97	0,82	34,8 „	69,2—9,7
Земля . . .	149,5 „ „	1,00	1 год.	1,00	1,00	29,8 „	—
Марс . . .	228 „ „	1,52	1 г. 322 сут.	0,54	0,11	24,0 „	26—3,5
Юпитер . .	778 „ „	5,20	11 л. 315 „	11,14	318,4	13,0 „	46—31
Сатурн . .	1 426 „ „	9,55	29 л. 167 „	9,4	95,2	9,6 „	21,2—15,3
Уран . . .	2 870 „ „	19,22	84 г. 7 „	4,0	14,6	6,8 „	4,2—3,5
Нептун. . .	4 500 „ „	30,11	164 г. 280 „	4,3	17,3	5,4 „	2,3—2,2

VI.

Задачи из физики.

Упражнения этого рода сравнительно легче подыскивать, так как их можно черпать из существующих задачников по физике. Необходимо, однако, осмотрительно выбирать только такие задачи, в которых элемент физический воспринимался бы учащимися без особых усилий, был бы сразу понятен и не порождал бы новых трудностей. Задач такого рода в физике больше, чем обычно думают; многие упражнения, по традиции фигурирующие в книгах по физике, представляют собою по существу задачи геометрические, только высказанные в форме физического вопроса.

Сюда относится, прежде всего, ряд задач из механического отдела физики: черчение графиков расстояний для равномерного и неравномерного движения, построение параллелограмма скоростей, вычисление угловой скорости, угла между отвесами, простейшие случаи нахождения центра тяжести, определение формы круговых волн в стоячей и текучей воде, вычисление чувствительности уровня с пузырьком, и т. п. Далее: большинство задач на вычисление веса тел по их линейным

размерам и плотности, а также обратные задачи (напр., вычисление толщины стенок мыльного пузыря или пленки жидкости на воде и др. [1]). Из учения о жидкостях и газах: вычисление давления жидкости на дно и боковые стенки сосуда; задачи, относящиеся к плаванию тел, к подъемной силе аэростата и др. В отделе теплоты — некоторые задачи на тепловое расширение. Много материала для геометрических упражнений дает отдел оптики: размер тени, отражение в зеркале (кратчайший путь лучей), размеры изображения в камере-обскуре, и т. п. Из области звуковых явлений — задачи, относящиеся к эхо.

Рассмотрим ряд примеров.

63. Дирижабль обладает в спокойном воздухе скоростью 100 *км* в час. Начертить границы области, точки которой могут быть достигнуты дирижаблем в течении часа при скорости ветра: 1) в 60 километров в час; 2) 100 километров, 3) 150 километров.

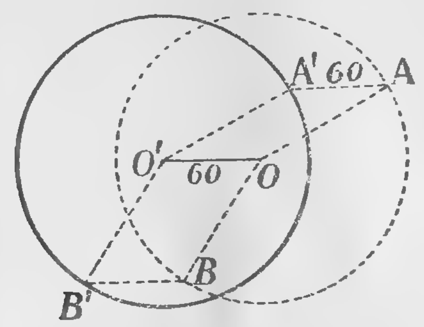
[1]) В качестве типичных примеров укажу следующие два:

При заливке прудов керосином (для уничтожения комаров) найдено, что один фунт керосина покрывает в среднем около 250 кв. футов водной поверхности. Зная, что куб. сантиметр керосина весит 0,8 грамма и что на фунт идет 25 куб. дюймов воды, определить толщину пленки керосина на воде.

Другой пример заимствую из книги Н. С. Дрентельна: „Пособие для работ по физике“:

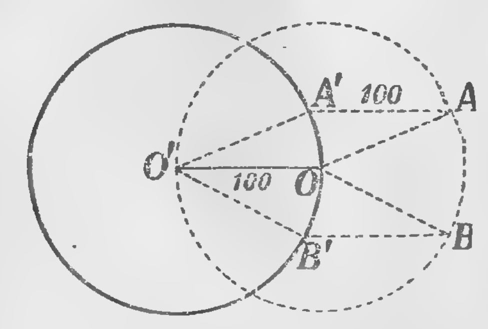
Сто метров тончайшей платиновой проволоки (изготовленной по способу Волластона) весят не более 11,07 грамма. Принимая плотность платины = 22 (т.-е., что 1 *куб. см.* платины весит 22 грамма), найти диаметр проволоки. — Ответ. Около 0,00063 *мм*, или приблизительно $\frac{1}{1200}$ *мм*.

Решение. Если точку отправления обозначим через O (см. черт. 14), то область, доступная ему



Черт. 14. К зад. № 63.

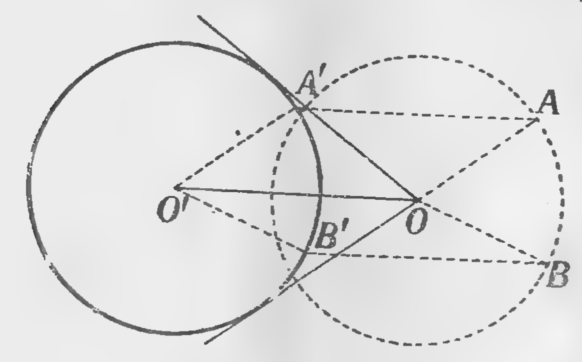
в течение первого часа в спокойном воздухе, будет круг, описанный из центра O радиусом



Черт. 15. К зад. № 63.

100 *км*. При ветре все точки окружности этого круга переместятся по направлению ветра на вели-

чину, равную скорости ветра. Если, напр., в спокойном воздухе дирижабль через час может достичь точки A (черт. 14), то при ветре скоростью 60 *км* он будет отнесен к точке A_1. Геометрическое место всех таких точек будет также окружность, описанная радиусом 100 *км* из точки O_1, отстоящей от O на 60 *км* (легко доказать это, приняв во внимание, что фигуры AA_1O_1O, BB_1O_1O и др. —



Черт. 16. К зад. № 63.

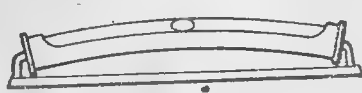
параллелограммы). Поэтому в первом случае доступная область ограничена кругом (черт. 14), центр которого находится в 60 километрах от точки вылета в направлении ветра; радиус круга — 100 *км*. Во втором случае — кругом того же радиуса, имеющим центр в 100 *км* от точки вылета в направлении ветра (черт. 15). В этом случае граница доступной области проходит через точку отправления O. Чтобы получить границы доступной области в третьем случае, отложим от точки отправления O (черт. 16) отрезок OO_1 в

150 километров и из точки O_1 опишем окружность радиусом 100 *км*; из точки O проведем к ней касательные. Доступная область ограничена этими касательными и большей дугой круга между точками касания.

Видоизменением этой задачи является вопрос:

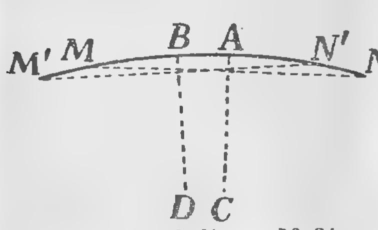
63а. Какую форму имеют волны от брошенного камня в текучей воде?

Ответ. Форму кругов (а не овалов, как может казаться с первого взгляда).



Черт. 17. К зад. № 64. Уровень с воздушным пузырьком.

64. Уровень с воздушным пузырьком представляет собою вделанную в оправу стеклянную трубку, изогнутую по дуге круга и наполненную жидкостью; в ней оставляется пузырек воздуха, который, при горизонтальном положении основания уровня, занимает высшую точку трубки, т. е. ее середину (см. черт. 17). Если радиус дуги, по которой изогнута трубка, равен 2 метрам, то насколько отодвинется пузырек от середины при наклонении прибора $^1/_2°$?



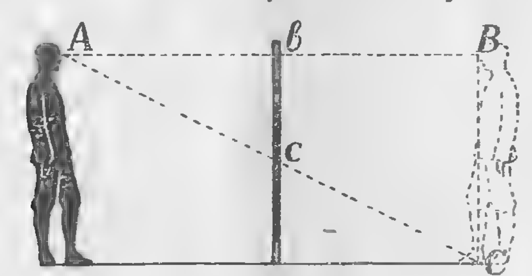
Черт. № 18. К зад. № 64.

Решение. На черт. 18 MAN есть первоначальное положение дуги уровня, M_1BN_1 — новое, при чем хорда M_1N_1 составляет с хордой MN угол

в $^1/_2$°. Пузырек, бывший раньше в точке *A*, теперь остался в той же точке, но середина дуги *MN* переместилась в *B*. Требуется вычислить длину дуги *AB*, если радиус ее равен 2 метрам, а величина в градусной мере — $^1/_2$° (это следует из равенства острых углов с перпендикулярными сторонами). Искомая дуга равна

$$\frac{2\pi \cdot 2}{360 \cdot 2} = 17{,}4 \text{ миллиметра.}$$

Результат показывает, что уровень с таким радиусом кривизны был бы чрезвычайно чувствителен.



Черт. 19. К зад. № 66.

65. Лесная поляна имеет форму ромба. В какой точке на ней нужно поместиться, чтобы одновременно услышать эхо своего возгласа от всех стен леса?

Решение. Задача сводится к отысканию точки, равноудаленной от 4-х сторон ромба, т.-е. к нахождению центра вписанного круга. Точка эта лежит на пересечении биссектрис углов между сторонами, т.-е. на пересечении диагоналей.

66. Чтобы видеть себя в зеркале в отвесном положении во весь рост, вовсе не необходимо иметь зеркало высотою в рост человека: для этого достаточно зеркало в половину человеческого роста. Доказать это.

Решение. Сделав построение (черт. 19), легко усмотреть, что нужная часть *bc* зеркала составляет отрезок прямой, проведенной через середину боковой стороны треугольника *ABC* параллельно основанию. Она равна $\frac{1}{2}$ *BC*, т.-е. половине человеческого роста (вернее, половине возвышения глаза над полом).

67. Аэроплан шириною 12 метров был сфотографирован во время полета снизу, когда он пролетал отвесно над аппаратом. Глубина камеры 12 *см*. На снимке ширина аэроплана равна 8 миллиметрам. На какой высоте летал аэроплан в момент фотографирования?

Решение. Из чертежа 20 видно, что (вследствие равенства углов 1 и 2 и параллельности горизонтального протяжения предмета его изображению) линейные размеры предмета так относятся к соответствующим протяжениям изображе-



Черт. 20. К зад. № 67.

ния, как расстояние предмета от объектива относится к глубине камеры. В нашем случае, обозначив высоту аэроплана над землей через x, имеем пропорцию:

$$12000 : 8 = x : 0,12;$$

откуда $x = 180$ метров.

68. Почему принято считать лучи Солнца, падающие на Землю (или другую планету), параллельными между собою? Вычислите, какой наибольший угол могут составить между собою два луча, исходящие из одной точки Солнца и падающие на земную площадку, ширина которой 1 километр?

Решение. Принимая расстояние от Земли до Солнца в 150 000 000 *км*, вычислим, какому центральному углу соответствует при таком радиусе дуга длиною в 1 километр. Результат: 0,0015″ — угол, недоступный измерению даже точнейшими астрономическими приборами.

69. На каждый кв. *см* земной поверхности опирается столб атмосферы, весящий 1 килограмм. Сколько весит вся земная атмосфера? Окружность Земли — 40 000 000 метров.

Решение. Задача сводится к вычислению поверхности земного шара по ее окружности, в квадратных сантиметрах. Ответ: 5 триллионов ($5 \cdot 10^{18}$) килограммов. Будет поучительнее в смысле наглядности, если вычислить, какого размера (величина ребра или диаметра) железный куб или шар равен по весу всей атмосфере.

70. Может ли плавать в воде полый медный шар, наружный диаметр которого 12 *см*, а толщина стенок — $1^1/_2$ *см*. (Тела плавают лишь в том случае, когда весят меньше равного объема воды). 1 куб. *см* меди весит 9 граммов.

Решение. Объем полого шара определяем, как разность объемов шара в 12 *см* диаметром и шара (полости) в 9 *см* диаметром: $\frac{1}{6}\pi \cdot 12^3 - \frac{1}{6}\pi \cdot 9^3 = 523,7$ куб. *см*. Вес его равен $523,7 \times 9 = 4713$ *г*. Вес водяного шара равного наружного объема $= \frac{1}{6}\pi 12^3 = 904,78$. Шар должен потонуть.

71. Почему лучина загорается быстрее, чем целое полено, от которого она отколота?

Решение. Задача с первого взгляда представляется вовсе не геометрической; между тем она сводится к чисто геометрическому вопросу. Действительно, так как нагревание происходит с *поверхности* и распространяется на весь *объем* тела, то следует сравнить поверхность и объем лучины, например, квадратного сечения, с поверхностью и объемом полена той же длины и тоже квадратного сечения, чтобы определить, какой величины поверхность приходится на каждый куб. сантиметр древесины в обоих случаях. Если толщина полена в 10 раз больше толщины лучины, то боковая поверхность полена больше поверхности лучины тоже в 10 раз, объем же его больше объема лучины в 100 раз. Следовательно, на каждую единицу поверхности в лучине приходится вдесятеро меньший объем, чем в полене: одинаковое коли-

чество тепла нагревает в лучине вдесятеро меньше вещества — отсюда и более раннее воспламенение лучины, чем полена, от одного и того источника тепла. (Вследствие дурной теплопроводности дерева, указанные соотношения следует рассматривать лишь как приблизительные, характеризующие общий ход процесса, а не количественную сторону).

Видоизменением этой задачи является такой практический вопрос:

72. Два котла, большой и малый, одинакового материала и формы (или два самовара), наполнены кипятком. Какой остынет скорее?

Решение. Вещи остывают с поверхности, и, следовательно, остынет скорее тот котел, в котором на каждую единицу объема приходится бóльшая поверхность. Если один котел в n раз выше и шире другого, то поверхность его больше в n^2 раз, а объем в n^3; на единицу поверхности в большем котле приходится в n раз больший объем. Следовательно, меньший котел должен остыть раньше.

По той же причине ребенок, стоящий на морозе, должен зябнуть больше, чем одинаково одетый взрослый: количество тепла, возникающего в каждом куб. сантиметре тела, у обоих одинаково (приблизительно), но теряющая теплоту поверхность тела, приходящаяся на каждый куб. сантиметр, у ребенка больше, чем у взрослого.

Рассмотрим еще следующую задачу, которая может служить иллюстрацией „принципа скорейшего прихода“ и подготовляет к лучшему пониманию условий преломления лучей.

73. Верховой должен прибыть (черт. 21) из точки A в точку C, отделенную от него полосой песку шириною 2 *км* и полосой луга шириною 3 *км*. Скорость его на песчаной почве вдвое меньше, чем на лугу. Доказать, что путь по ломаной линии AMC (когда $EM = 1$ *км*) быстрее приведет к точке C, нежели путь по прямой AC или по ломаной AEC. Расстояние $BC = 7$ *км*.

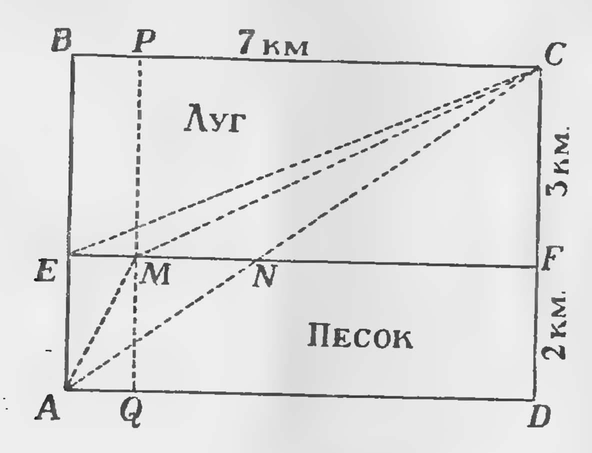


Черт. 21. К зад. № 72.

Решение. Рассмотрим путь (черт. 22) по прямой AC. Длина его $= \sqrt{5^2 + 7^2} = 8{,}60$ *км*. Длина части NC (путь по лугу) $= {}^3/_5\ AC = 5{,}16$ *км*, а AN — путь по песку — 3,44 *км*. Так как по песку движение вдвое медленнее, то 3,44 *км* песчаного пути равнозначащи, в смысле требуемого времени, двойному пути по лугу — 6,88 *км*. И значит путь в

8,60 *км* по песку и лугу соответствует $5{,}16 + 6{,}88 = 12{,}04$ *км* пути по лугу.

Такой же расчет сделаем для пути *AMC*. Отрезок $AM = \sqrt{1 + 2^2} = 2{,}27$ *км*, что отвечает 4,54 *км* пути по лугу. $MC = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6{,}71$ *км*. Длина



Черт. 22. К зад. № 72.

всего пути *AMC* соответствует 4,54 *км* + 6,71 *км* = 11,25 *км* пути по лугу. Мы видим, что путь по ломаной *AMC* будет пройден *скорее*, чем путь по прямой *AC*.

Наконец, третий путь *AEC* состоит из части AE = 2 *км* (соответствующей 4 *км* пути по лугу) и пути по лугу $EC = \sqrt{3^2 + 7^2} = 7{,}61$ *км*; весь путь соответствует $4 + 7{,}61 = 11{,}61$ *км* пути по

лугу и *длиннее AMC*, хотя *короче* прямого пути *AC* [1]).

Для большинства учащихся результат этих вычислений будет полной неожиданностью, так как кажется невероятным, чтобы путь по ломаной линии мог быть быстрее прямого пути. Тем более полезно проделать с ними это упражнение, подготовляющее к сознательному усвоению закона преломления лучей [2]).

Далее приведены некоторые сведения из физики, как образец материала для геометрических задач.

Справочные сведения к главе VI.

Скорости.

Пешеход: около 6 *км* в час = 1,7 *м* в сек.
Пловец (рекорд): 1,6 *м* в сек.
Бегущий человек (рекорд): 9,6 *м* в сек.
Конькобежец (рекорд): 11,2 *м* в сек.
Велосипедист (рекорд) 16,3 *м* в сек.
Пароход: около 12 *м* в сек.

---

[1]) Если учащиеся знакомы с тригонометрией, им можно прибавить, что для пути *AMC* синус „угла падения" относится к синусу „угла преломления", как скорость по песку относится к скорости по лугу (1 : 2). Действительно: синус угла падения $(AMQ) = \frac{1}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; синус угла преломления $(CMP) = \frac{6}{\sqrt{3^2+6^2}} = \frac{6}{\sqrt{45}}$. Отношение их $\frac{1}{\sqrt{5}} : \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{1}{2}$ т. е. равно отношению скоростей (закон преломления лучей).

[2]) Аналогичная задача с отражением света общеизвестна (см. напр., мою „Физическую хрестоматию", ч. 2, или „Занимательную физику", кн. 1).

Паровоз: до 30 *м* в сек.
Автомобиль (рекорд): 63,4 *м* в сек.
Аэроплан: до 120 *м* в сек.
Ураган: около 50 *м.* в сек.
Точки земного экватора: 465 *м* в сек.
Луна вокруг Земли: 1 023 *м* в сек.
Звук в воздухе (при 15°): 340 *м* в сек.
Пуля (начальная скорость): 640 *м* в сек.
Земля вокруг Солнца: 29,8 *км* в сек.
Собственное движение звезды Сириус: 18 *км* в сек.
Собственное движение звезды Арктур: 400 *км* в сек.
Свет: 300 000 *км* в сек.

Воздух.

Вес 1 куб. метра воздуха близ земной поверхности — 1,3 *кг.*

Воздух близ земной поверхности давит, вследствие своего веса, на каждый кв. сантиметр с силою 1,03 *кг,* независимо от направления (даже снизу вверх).

Тепловое расширение.

Твердые тела при нагреваний на каждый градус Цельсия расширяются по всем направлениям:

Платина	на 0,000009	тех своих размеров, какие они имеют при 0° Ц.
Железо	на 0,000012	
Медь	на 0,000017	
Серебро, латунь. . .	на 0,000019	
Свинец	на 0,000029	
Стекло	на 0,000008	
Дерево (вдоль волокон).	на 0,000003	

Полости (пустоты) при нагревании тела не сокращаются, а расширяются, как соответствующее сплошное тело.

Жидкости при нагревании на каждый градус Цельсия увеличиваются в объеме

Керосин	на 0,001	того объема, какой они имеют при 0° Ц.
Спирт . . .	на 0,0008	
Ртуть . . .	на 0,00018	

Все газы при нагревании на каждый градус Цельсия увеличиваются в объеме [1]) на 1/273 долю того объема, какой они занимают при 0° Ц.

При охлаждении тела́ на те же указанные доли сжимаются.

---

1) Если давление их при этом не меняется

VII.

Задачи из живой природы.

В физиологии, зоологии и ботанике также можно найти темы для геометрических упражнений. Задач с подобным содержанием не много [1]), но ими особенно надо дорожить, так как помимо своего образовательного значения, они желательны еще и потому, что весьма способствуют оживлению занятий и освежению внимания. Многие задачи этого рода удобнее разбирать во время экскурсий, подготовляя и собирая материал для классных упражнений (об упражнениях во время экскурсий — см. далее главу X).

74. В квадратном дюйме пчелиных сотов можно насчитать в среднем 23 ячейки, имеющих форму равных правильных шестиугольников. Определить длину каждой стороны ячейки.

Р е ш е н и е задачи сводится к вычислению стороны правильного шестиугольника, площадь которого равна $^1/_{23}$ кв. дюйма. Обозначив сторону через x, имеем:

$$\frac{1}{23} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2};\ x = 0{,}13 \text{ дюйма.}$$

[1]) В моем „Задачнике" их собрано около 25.

75. Школьный микроскоп увеличивает в 50 раз. Можно ли в него рассмотреть красные тельца нашей крови, имеющие в ширину 0,007 *мм*?

Р е ш е н и е. Принимая расстояние ясного зрения равным 25 *см*, имеем, что предмет шириною 0,007 *мм* виден невооруженному глазу с такого расстояния под углом

$$\frac{0{,}007 \cdot 360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi \cdot 150} = \text{около } 7''.$$

„Увеличение в 50 раз" означает, что угол зрения, под которым виден предмет помощью прибора, в 50 раз больше, чем для невооруженного глаза. Следовательно, кровяное тельце должно представиться в микроскоп под углом в $7'' \times 50 = 350'' =$ = около $6'$. Так как предел различения [1]) для нормального глаза $1'$, то микроскоп с увеличением в 50 раз должен быть вполне достаточен для указанной цели.

76. О красных кровяных тельцах („шариках") читаем в „Курсе физиологии животных и человека" проф. Б. Ф. В е р и г о следующее:

„Каждый шарик может поглощать и выделять кислород только с поверхности. Поэтому физиологическое функционирование шариков в крови животного должно быть тем успешнее, чем больше общая их поверхность. А эта последняя тем больше, чем мельче раздроблено их вещество и чем больше, соответственно этому, их число. Физиологи, на основании приблизительного определения поверхности каждого шарика в крови че-

[1]) Об этом см. главу VIII, 1.

ловека, а также принимая во внимание, что в одном кубическом миллиметре крови у человека 5 000 000 шариков, и что количество крови взрослого человека равняется приблизительно 5 литрам, вычислили, что общая поверхность всех находящихся в крови человека красных шариков равняется 3200 квадратных метров, — что и могло быть достигнуто исключительно благодаря измельчанию шариков“.

Проверить указанную величину общей поверхности красных кровяных телец человека, зная, что каждый так называемый „шарик“ имеет (вопреки названию) форму игральной шашки, шириною 0,007 миллиметра а толщиною 0,002 *мм*.

Решение. Вычисление по формуле цилиндра дает для поверхности (полной) одного кровяного тельца величину:

$$2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 0{,}007^2 + \pi \cdot 0{,}007 \cdot 0{,}002 = 0{,}000121 \text{ кв. мм.}$$

Умножив эту величину на $5\,000\,000 \times 5\,000\,000$, т.-е. на $25 \cdot 10^{12}$, получим общую поверхность всех шариков 3025 кв. метров (более четверти десятины) — весьма близкую к указанной в тексте.

77. При каждом ударе сердце человека выталкивает 175 куб. *см* крови. Сердце делает 75 ударов в минуту. Каких размеров кубический сосуд потребовался бы, чтобы вместить количество крови, перекачиваемое сердцем в течение суток?

Решение. Искомое ребро куба обозначим через x. Тогда $x^3 = 75 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 175$; $x = 260$ *см*, т.-е. почти 4 аршина.

78. Зрачок человеческого глаза может изменять свой диаметр (в зависимости от яркости освещения) от 2 до 9 миллиметров. Во сколько раз расширенный зрачок пропускает больше света, чем суженный?

Решение. Количество пропускаемого света пропорционально площади отверстия. Следовательно, расширенный зрачок пропускает больше лучей, нежели суженный, в отношении

$$\frac{9^2}{2^2} = \frac{81}{4} \text{ т.-е. в } 20{,}25 \text{ раз.}$$

79. Поверхность тела взрослого человека, весящего 65 килограммов, равна в среднем 2 кв. метрам. Как велика поверхность тела человека, весящего 50 килограммов?

Решение. Вес человеческого тела, в среднем, пропорционален его объему, т.-е. кубу линейных протяжений (напр. высоты), а поверхность — квадрату высоты. Если веса, а следовательно, и объемы пропорциональны 65 и 50, то высоты относятся как $\sqrt[3]{65} : \sqrt[3]{50}$, поверхности же — как $\sqrt[3]{65^2} : \sqrt[3]{50^2}$. Следовательно, искомая поверхность равна

$$2\sqrt[3]{\frac{50^2}{65^2}} = 1{,}55 \text{ м.}$$

Вариантом этой задачи является вычисление среднего нормального веса для людей различного роста (для человека ростом 165 *см* нормальным считается вес 57 килограммов).

Из области ботаники можно выбрать ряд геометрических упражнений, относящихся к листьям. Вот несколько примеров.

80. Лист одуванчика из тенистого места имеет в длину 31 *см*; лист другого экземпляра, выросшего на солнце, имеет в длину 6,2 *см*. Во сколько раз первый лист имеет бо́льшую площадь?

Решение. Считая листья имеющими геометрически подобную форму, находим искомое отношение, взяв отношение квадратов линейных протяжений:

$$\frac{31^2}{6{,}2^2} = 25.$$

Лист, выросший в тени, имеет в 25 раз большую площадь.

81. (Задача, обратная предыдущей). Площадь листа тополя от корневой поросли, в тени, и такой же формы лист с поверхности кроны были измерены палеткой [1]). Первый лист оказался по площади в 20 раз больше второго. Во сколько раз первый лист шире второго?

Решение. $\sqrt{20} = 4{,}47$. Ответ: в $4\frac{1}{2}$ раза.

[1]) Палеткой называется сетка из квадратиков определенного размера (миллиметр; 0,1 дюйма), начерченная на прозрачной бумаге. При измерении площади ее накладывают на измеряемый контур и считают заключающиеся в нем квадратики, оценивая их дробные части, на краях контура, по глазомеру. Употребляется в землемерной практике при определении площади участков на плане.

82. Из двух липовых листьев одинаковой формы один на 25% длиннее другого. На сколько % разнятся их площади?

Решение. $\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1{,}56$. Ответ: на 56%.

83. На березе 200 000 листьев. Поверхность каждого (одна сторона) — в среднем 15 кв. *см*. Вычислить сторону квадрата, имеющего площадь, равную общей площади всех листьев березового дерева.

Решение. Площадь всех листьев 15.200 000 = = 3 000 000 кв. *см* = 300 кв. метров. Сторона квадрата с такою площадью $= \sqrt{300} = 17{,}3$ метра (около 8 сажен).

В заключение рассмотрим следующую поучительную задачу.

84. Сила насекомых, по сравнению с весом их тела, весьма велика. Муха поднимает лапками спичку, т.-е. груз, во столько же раз больший веса ее тела, во сколько раз деревянный квадратный брус в 4 сажени длины и поларшина толщины больше веса человеческого тела (в 10 раз). Жук-олень (5 *см* длины) волочит груз, в 50 раз превышающий вес его тела, а жук-геркулес (до 15 *см* длины) удерживает на спине груз в 40 раз более тяжелый, чем он сам; такой, относительно, груз — 150 — 200 пудов — конечно, раздавил бы человека. Выяснить соотношение мышечной силы человека и насекомых, принимая во внимание следующую особенность мышц: „В виду того, что каждая мышца состоит из большего или

меньшего числа располагающихся параллельно друг другу мышечных волокон, из которых каждое своим сокращением принимает свою долю участия в приподнимании груза, — мы должны признать, что величина абсолютной силы мышцы должна стоять в зависимости от числа образующих мышцу мышечных волокон, то-есть от площади поперечного разреза мышцы" (проф. Б. Ф. Вериго).

Решение. Если бы человек стал в 10 раз меньше по своим линейным размерам, то-есть приобрел бы величину жука-геркулеса (170 *см*: :10 = 17 *см*; геркулес — 15 *см*), то вес его тела уменьшился бы в 1000 раз, а сила мышц ослабела бы, пропорционально уменьшению площади поперечного сечения, всего в 100 раз. Если человек весил 4 пуда (64 *кг*) и мог удержать груз в 10 пудов (160 *кг*[1]), то, уменьшенный в 10 раз, он весил бы 64 грамма и мог бы удержать груз в 1600 граммов, — в 25 раз больший его веса. При еще большем уменьшении — до размеров мухи, т.-е. в 200 раз, — вес его уменьшился бы в 8 000 000 раз, а мышечная сила всего в 40 000 раз; он весил бы 8 миллиграммов, а мог бы поднять груз в 4 грамма (4000 миллиграммов) — в 500 раз больше! Мы видим, следовательно, что насекомые кажутся нам сильными не потому, что их мышцы значительно сильнее мускулов крупных животных, а потому, что вес их тела крайне мал. Увеличенные до размеров человека или лошади, муравьи были бы слабее их.

[1]) Становая сила человека в отдельных случаях достигает еще больших размеров.

Конечно, последняя задача предназначается не для самостоятельного решения учениками, а для разбора преподавателем в классе.

Можно попутно указать и на то, что великаны, описанные в „Путешествии Гуливера" и бывшие в 12 раз выше людей нормального роста, должны были быть относительно очень слабосильны; их мышечная сила возрасла бы в 144 раза и равнялась бы, самое большее, 10 × 144 = около 1 440 пудов, между тем как вес их тела увеличился бы в 1 728 раз и достигал бы 7 000 пудов. Другими словами, эти великаны не могли бы поднять своего собственного тела, т.-е. лишены были бы способности передвигаться без помощи внешней силы.

В виде образца материала, который может быть взят сюжетом для ряда задач по геометрии, привожу далее некоторые справочные данные из жизни пчел.

Справочные сведения к главе VII.

Пчелы и их деятельность.

Величина пчел:	Пчела.	Трутень.	Матка
Длина в дюймах . .	0,5 —0,6	0,7 —0,9	1— 1,2
Ширина в. дюймах .	0,23—0,3	0,35—0,45	0,35—0,4

Количество пчел в семье:	Среднее число всех рабочих пчел:	Приблизит. число летающих за взятками:
К наивысшему развитию взятка . .	80 000—10 0000	50 000—60 000
В зимнее время . .	30 000	- -

Сильная семья в один взяточный день вносит от 5 до 10 фунт. меду. Наибольший сбор меда в одно лето в одном улье доходит до 8 пуд.

Удельный вес меда: 1,427.

Вес одной пчелиной ноши: 62 миллиграммов.

Вес меда в одной ячейке: 400 миллиграммов.

Чтобы собрать 1 ф. меда, пчела вылетает 6 000—7 000 раз.

Число пчелиных ячеек в кв. дюйме 23 [1]).

[1]) Некоторые сведения подобного же характера указаны в прибавлении к главе II. О теле и деятельности человека см. Амар „Человеческая машина“ (ГИЗ, 1922).

VIII.

Особые задачи.

1. Угол зрения.

Выяснению понятия об угле зрения, или угловой величине предмета, следует посвятить достаточно времени при занятиях геометрией, так как мироведение и физика, где эти понятия явно или скрыто применяются, не могут заниматься этим геометрическим понятием с необходимою обстоятельностью. При нынешней системе преподавания это важное, хотя и элементарное понятие, чрезвычайно полезное также в практической жизни, — остается чуждым даже большинству образованных людей. Между тем проработать его на ряде элементарных упражнений очень легко.

Углом зрения, или угловой величиной предмета, называется угол, составляемый двумя прямыми линиями, проведенными от глаза наблюдателя к крайним точкам рассматриваемого предмета. Так как в большинстве случаев угол этот не велик, то при решении относящихся сюда задач можно прямолинейное расстояние между крайними точками предмета (т.-е. его ширину или высоту) считать рав-

ным дуге угла зрения, принимаемого за центральный; мы уже видели (стр. 54 — 55), что практически это допустимо для углов до 10° - 15°, даже 20° — 30°, в зависимости от требуемой точности вычисления.

В качестве примера, вычислим, под каким углом зрения виден человек ростом 1,7 метра на расстоянии 200 метров от наблюдателя; результат: $\frac{1,7 \cdot 360}{2\pi \cdot 200}$ = около 1°. Под тем же приблизительно углом взрослый человек видит ноготь указательного пальца своей вытянутой руки; это легко расчитать, принимая ширину ногтя за 1 *см*, а расстояние его до глаза — за 60 *см*. Вообще, всякий предмет с расстояния 57 своих поперечников ¹), усматривается под углом в 1°. Запомнив это, легко решать задачи, подобные следующей:

85. Телеграфный столб, толщиною 6 вершков, покрывается ногтем вытянутой руки. Как велико, приблизительно, расстояние до него?

Ответ: 6 вершк. × 57 = 342 вершк. = около 7 саж.

Если предмет покрывается половиною ногтя, то его расстояние от наблюдателя в 100 — 120 раз (57 × 2) больше его поперечника. Полный диск Луны (а также и диск Солнца) как раз покрывается половиною ногтя указательного пальца вытянутой руки: отсюда следует, что Луна и Солнце отстоят от Земли приблизительно на 120 своих поперечников, — поучительный пример важных астро-

¹) Точнее $\frac{180}{\pi} = 57,3°$.

номических наблюдений измерительного характера, сделанных без всяких приборов, буквально „голыми руками“ с помощью понятия об угле зрения. (Другой существенный факт, устанавливаемый тем же приемом, есть тот, что наблюдаемое простым глазом заметное увеличение дисков Луны и Солнца вблизи горизонта — явление кажущееся, обман зрения).

Полезно составить с учащимися табличку расстояний (в поперечниках видимого предмета), соответствующих различным углам зрения:

10°	5,7	30′	114
5°	11,4	10′	342
2°	28,5	1′	3438
1° . . .	57	30″ . . .	6875

1″ . . . 206265.

Имея измерительный прибор для определения угловой величины предмета (до полуградуса), — а такие приборы могут быть изготовлены самыми примитивными средствами ¹) — учащиеся смогут пользоваться этой табличкой на практике для опре-

¹) В моем „Задачнике“ описано устройство так называемого „грабельного угломера“, для изготовления которого не требуется большого искусства. Здесь опишем еще другой самодельный угломер, пригодный для приближенного измерения угла зрения. На стене или на заборе откладывают в горизонтальном направлении, на высоте человеческого роста, 10 — 12 равных промежутков, отмечая границы их резкими вертикальными штрихами. Откладывают от среднего деления по перпендикулярному направлению 57⅓ таких же промежутков и становятся в конечную точку. Легко понять, что отсюда каждый промежуток на стене виден под углом в 1°. Вытянув правую руку с записной книжкой по направлению к забору и расположив край ее параллельно линии делений, смотрят на деления пра-

деления расстояния до отдаленного предмета, если известны его размеры (железнодорожный вагон, окно, кирпичная кладка), либо его размеров, если известно расстояние до него. Упражнения такого рода приятно разнообразят путь во время экскурсий за город, попутно развивая глазомер. Не следует упускать также случая проверить и геометрически обосновать некоторые рецепты этого рода, например:

86. Для приблизительной оценки угловой величины отдаленных предметов в „Справочной книге для путешественников" рекомендуется пользоваться следующими приемами: „Если принять глаз за вершину угла, то линии, идущие от него к концам большого и среднего пальцев (вытянутой руки), возможно более раздвинутых, образуют угол приблизительно 15°. Если одну из линий провести через кончик мизинца, то угол получается около 18°". Принимая первое расстояние за 17 *см*, второе за 20 *см*, при расстоянии от глаза 65 *см*, — проверьте, правильны ли эти указания.

Несложным вычислением легко убедиться, что приведенные указания приблизительно правильны.

Но и в пределах класса можно найти достаточно материала, поучительного и интересного, для плодотворного применения понятия об угловой величине видимого предмета. Вот пример:

вым глазом (закрыв левый) и замечают, сколько делений помещается между определенными точками края книжки. Затем, разделив расстояние между этими точками на соответствующее число делений, определяют тем самым величину, отвечающую одному градусу. Теперь, проектируя книжку в конце вытянутой руки на любой отдаленный предмет, легко измерить угол, под каким этот предмет усматривается.

87. Как велики должны быть буквы на классной доске и на стенных таблицах, чтобы учащиеся, сидя на своих местах, видели их столь же отчетливо, как в своих тетрадях и книгах?

Результат вычисления может дать попутно важное практическое указание и преподавателю, определяя требуемый размер тех букв и чертежей, которые он выводит на доске. Интересно и такое упражнение:

88. Начертить в тетради кружок, который имел бы ту же видимую величину (т.-е. усматривался бы под тем же углом зрения), как Луна на небе. (Другая редакция: начертите, какой величины вам кажется Луна).

Р е ш е н и е этой задачи приводит к результату совершенно неожиданному. Чтобы с расстояния ясного зрения (25 *см*) видеть кружок под углом в $\frac{1}{2}$°, т.-е. под тем же, под каким мы видим Луну на небе, нужно дать ему размеры в 114 раз меньше, чем 25 *см*; это вытекает из таблички стр. 105. Но $\frac{25}{114}$ сантиметра — это 2,2 миллиметра — толщина спички! Диск Луны, который нам кажется, — особенно при восходе или заходе — таким крупным, — в действительности занимает на нашей сетчатке не больше места, чем ширина спички, которую мы рассматриваем в 25 *см* от глаза... Такова же и видимая величина солнечного диска[1]).

[1]) Вот почему диск Солнца на сфотографированных пейзажах выходит таким маленьким: он имеет на снимках правильные размеры, которые на ландшафтах, сделанных от руки, всегда сильно преувеличиваются художниками.

Учащиеся, проделавшие подобные упражнения, не станут уже утверждать, — как приходится зачастую слышать даже из уст образованных людей,— что Луна кажется им величиной с тарелку или с яблоко, а смогут давать более правильную оценку видимой величине предметов. Ширина радуги, длина огненного следа падающей звезды, расстояние венца или кругов гало от солнечного диска будут оцениваться ими не в саженях, а в угловой мере. Поймут учащиеся и неточности многих поэтических описаний, хотя бы и высокохудожественных — например, знаменитого описания морского берега в „Короле Лире":

Эдгар: . . . . „Как страшно!
Как кружится голова! Как низко ронять свои взоры...
Галки и вороны, которые вьются там в воздухе на средине расстояния,
Кажутся едва ли так велики, как мухи. На полпути вниз
Висит человек, собирающий морские травы... ужасное ремесло!
Он мне кажется не больше своей головы.
Рыбаки, которые ходят по прибрежью, —
Точно мыши; а тот высокий корабль на якоре
Уменьшился до размера своей лодки; его лодка — плавающая точка,
Как бы слишком малая для зрения... [1]).

Муха, голова человека, мышь, лодка — все эти предметы могут иметь самую различную видимую (угловую) величину, в зависимости от расстояния их от глаза и, следовательно, мерилом видимых размеров сами по себе служить не могут. Мышь может казаться и больше человеческой головы и меньше мухи, в зависимости от удаления этих предметов.

[1]) Перев. И. С. Тургенева.

Пользуясь понятием об угле зрения, можно, между прочим, вычислить длину земной и лунной тени весьма простым и изящным способом (указанным Араго в „Общепонятной Астрономии", т. III, кн. XXII). Наблюдатель, глаз которого помещен в вершине конуса земной тени, должен видеть Землю под тем же углом зрения, как и Солнце (это ясно из черт. 13, стр. 72). Но так как удаление наблюдателя от Солнца в этой точке почти равно удалению Земли от Солнца, то этот угол можно принять равным $1/2^\circ$. Мы знаем уже, что соответствующее расстояние равно 114 земным диаметрам. $12\,800 \times 114 = 1\,459\,200$ километров, — число мало отличающееся от полученного ранее иным способом (1 390 000), особенно если принять во внимание, что средняя угловая величина Солнца не 30', а 32". — Средняя длина лунной тени, по тому же расчету, должна равняться $3\,500 \times 114 =$ около 400 000 километров.

Вот еще упражнения сходного рода:

89. Кружок с диаметром в 1", видимый с Земли на лунной поверхности, содержит в себе около $2^1/_4$ кв. верст (Дж. Гершель, „Очерки Астрономии"). Проверить это утверждение.

90. Если есть жители на обращенной к нам стороне Луны, то Земля должна представляться им в виде диска с диаметром в 2° (Гершель). Проверить это.

Познакомившись — не на словах, а на деле — с углом зрения, учащиеся смогут правильно понять, в чем сущность „увеличительного" действия телескопов и микроскопов: в увеличении угла зрения, под которым рассматривается предмет. Телескоп

„увеличивает в 1000 раз“ — это значит, что он показывает нам предмет под углом зрения, в 1000 раз большим, чем видит невооруженный глаз. Без телескопа Марс виден нами, на ближайшем расстоянии, под углом в 26″; следовательно, в телескоп с 1000-кратным увеличением мы видим эту планету под углом $26'' \times 1000$ = около 7°. Кружок в 1½ *см* диаметром, начерченный в книге, мы видим с расстояния ясного зрения именно под таким углом. Значит, Марс в могущественнейший телескоп виден астрономами такой же величины, как 1½-сантиметровый кружок в книге — на столь тесном пространстве скрыты все загадки этого мира.

Наконец, с тем же понятием угла зрения следует связать и ту особенность нормального человеческого глаза, что он не различает раздельно двух точек, сближенных менее, чем на 1′. Всякий предмет, представляющийся нормальному глазу под углом менее 1′, воспринимается им как т о ч к а, лишенная очертаний. Отсюда — целый ряд следствий, дающих новый материал для интересных задач. Как далеко должны находиться птица [1]), аэроплан, всадник, корабль и т. п., чтобы превратиться в точку для невооруженного глаза? Для глаза, вооруженного трубой, увеличивающей в 50 раз? Как малы те предметы, которые уже неразличимы в микроскоп, увеличивающий в 100 раз? На каком расстоянии должны сходиться для нормального глаза рельсы железнодорожного пути? Как можно воспользоваться подобными сведениями для измерения остроты своего зрения [1]), — вот некоторые из вопросов, легко разрешаемых элементарными геометрическими приемами и попутно обогащающих учащихся полезными практическими и общенаучными сведениями. В составленном мною „Задачнике“ углу зрения отведено около 30 задач, но число их, если бы понадобилось, можно значительно увеличить. Остановимся в заключение еще на нескольких задачах этого рода.

[1]) Воздух предполагается при этом совершенно прозрачным; так как это бывает не часто, то подобные расчеты следует считать пригодными лишь для приближенной оценки расстояний. Мало пригодны подобные расчеты и для определения в е р т и к а л ь н о г о расстояния отдаленного предмета от набюдателя, так как условия зрения при этом, повидимому, иные, чем при нормальном положении головы. Данные о высоте пролета птиц, приводившиеся еще недавно в книгах по орнитологии, были получены известным немецким исследователем птичьих перелетов, Г е т к е, именно по указанному способу. По новейшим работам (Л у к а н у с а), данные Г е т к е оказались сильно преувеличенными.

91. Заслуживает ли доверия показание свидетеля, утверждающего, что он невооруженным глазом различил лицо обвиняемого с расстояния 500 шагов?

Р е ш е н и е. Подробности человеческого лица становятся неразличимыми, т. е. превращаются для нормального глаза в точку (представляются под углом менее 1′) на расстоянии гораздо меньшем 500 шагов. Например, оба глаза, расставленные на 3 *см*, сливаются в одну точку уже на расстоянии $3 \times 3438 = 10314$ *см* = 103 метра = 150 шагов. Различать лицо с расстояния втрое большего может

[1]) На Амуре в употреблении своеобразная единица длины „бука“, — расстояние, на котором уже не видны раздельно рога быка. Можно поставить учащимся вопрос о приблизительной величине этой единицы.

только человек с совершенно исключительною остротою зрения.

92. Может ли человек среднего роста, с нормальной остротой зрения, стоя на совершенно ровном месте, видеть, как железнодорожные рельсы сходятся вдали в одну точку? (Расстояние между рельсами нормальной колеи — 5 фут.; дальность горизонта для человека среднего роста на горизонтальной поверхности — $4\frac{1}{2}$ версты [1]).

Решение. Чтобы отрезок в 5 футов превратился для нормального глаза в точку, он должен находиться на расстоянии $5 \times 3\,438 = 17\,190$ фут $=$ $= 4{,}9$ версты. Значит, на ровной местности точка кажущейся встречи рельсов лежит ниже горизонта, т.-е. невидима. Кто на ровной местности видит точку встречи рельсов, тот обладает остротой зрения ниже нормальной (для этого достаточно уже весьма небольшое понижение остроты).

93. Если бы на Луне существовали жители таких же размеров, как и мы, то можно ли было бы их различить с Земли в сильнейший современный телескоп, увеличивающий в 1000 раз? Каких размеров должны быть здания на Луне, чтобы их можно было различать с Земли в такой телескоп? Если бы на Луне имелось сооружение размерами с крупный океанский пароход (около 200 метров длины), то могли ли бы мы видеть его в сильнейший современный телескоп?

[1]) О вычислении дальности горизонта — см. следующий параграф этой главы.

Решение. Телескоп, увеличивающий в 1000 раз, дает возможность различать предметы, угловая величина которых равна 0,001 минуты. Человек, средний рост которого 1,7 метра, на расстоянии Луны (380 000 *км*) должен был бы усматриваться с Земли под углом

$$\frac{360 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 0{,}0017}{2\pi \cdot 380000} = \text{около } 0{,}001''.$$

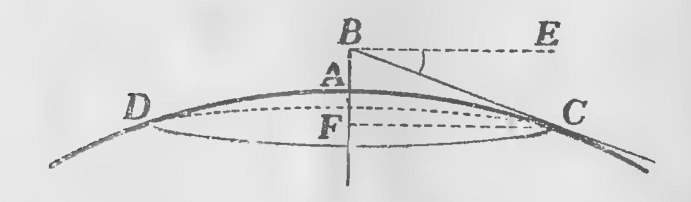
Следовательно, для различения предметов таких размеров, как человек, нужен был бы телескоп в 60 раз более могущественный, т.-е. увеличивающий не в 1000, а в 60 000 раз. — Здания на Луне должны иметь размеры в 60 раз больше человеческого роста, чтобы их можно было различить с Земли в телескоп с 1000-кратным увеличением. Так как $1{,}7 \times 60 = 102$ метрам, то крупные морские суда и другие большие сооружения современной техники, если бы они имелись на Луне, могли бы быть различаемы в сильнейшие телескопы земного шара.

Некоторые упражнения, связанные с углом зрения, имеются и в других местах этой книги — см. №№ 19, 20, 53—56, 134—138.

2. Дальность горизонта.

Задачи, относящиеся к вычислению дальности горизонта, удобно решаются помощью теоремы о квадрате касательной, или же, — если теорема эта была пропущена — то помощью теоремы Пифа-

гора (несколько сложнее). Основная задача этого рода состоит в вычислении (черт. 23) расстояния AC точек горизонта (т.-е. линии, отделяющей земную поверхность от неба) до наблюдателя, глаз которого находится в B на высоте AB над уровнем горизонтальной земной поверхности, — например, поверхности моря. (Необходамо разъяснить учащимся, что круг горизонта, — как видно из чер-



Черт. 23. Вычисление дальности горизонта.

тежа, — лежит ниже глаза наблюдателя, хотя это обычно не замечается наблюдателем, так как угол EBC очень мал; полезно и вычислить этот угол, называемый „понижением горизонта“, — о чем речь далее).

Обозначив искомую дальность горизонта AC через x, мы заменяем прежде всего расстояние AC весьма близким к нему расстоянием BC, т.-е. длиной касательной. Так как AB есть внешний отрезок секущей, проходящей через центр окружности (земного шара), то

$$x^2 = AB\ (AB + 2R),$$

где R — радиус земного шара.

Отсюда находим искомую дальность горизонта (обозначив AB через h):

$$x = \sqrt{h\ (2R + h)}.$$

Так как возвышение h глаза наблюдателя над почвой обычно весьма не велико по сравнениям с диаметром $2R$ земного шара (составляя, например, не более 0,1% для самого высокого подъема аэроплана), — то практически можно $2R + h$ считать равным $2R$, от чего формула значительно упрощается, принимая вид:

$$x = \sqrt{2Rh}.$$

Этой формулой и пользуются для решения практических задач[1]).

Рассмотрим ряд примеров:

94. Как далеко видите вы кругом себя, стоя на ровной местности или в лодке на воде?

Решение. Считая возвышение глаза над земной поверхностью равным, для взрослого человека, 170 сантиметрам, или 1,7 метра, получаем по формуле $x = \sqrt{2Rh}$:

$$x = \sqrt{1280000 \cdot 1{,}7} = 4\ 664 \text{ метра},$$

т.-е. около $4^1/_2$ километров, или 4 верст. Для людей высокого роста — расстояние несколько больше, низкого — меньше.

[1]) В эту формулу не введена атмосферная рефракция, на 6% увеличивающая дальность горизонта; тем не менее она все же дает удовлетворительные для практики результаты.

В связи с этим можно вычислить, каково должно быть возвышение глаза наблюдателя над почвой, чтобы при нормальном зрении увидеть на ровной местности точку схода обоих рельсов (см. задачу № 92).

95. Проверьте следующую применяемую в морской практике формулу вычисления дальности горизонта:

$$\text{дальность горизонта в } км = 3{,}6\sqrt{h},$$

где h — возвышение глаза в метрах.

Решение. Подставив в формулу $x=\sqrt{2Rh}$ вместо 2R — 12800000 метров, имеем:

$$x=\sqrt{12800000h}=1000\sqrt{12{,}8h} \text{ метров,}$$

или $3{,}6\sqrt{h}$ километров.

96. Как далеко видит авиатор с высоты 2 километров?

Решение.

$$x=\sqrt{12800\cdot 2}=160 \text{ километров.}$$

(Вычисление по упрощенной формуле предыдущей задачи дает почти тот же результат: $3{,}6\sqrt{2000}=$ $=160{,}02$ километра).

То же число показывает, с какого наибольшего расстояния может быть замечен (на горизонте) авиатор, поднявшийся на высоту 160 километров, если глаз наблюдателя находится близ уровня почвы.

97. Дальность видимости предмета, — т.-е. расстояние до него в море в тот момент, когда он появляется из-под горизонта наблюдателя, глаз которого находится на уровне моря, — часто в морской практике определяют упрощенно по правилу: дальность в морских милях равна квадратному корню из высоты предмета в футах. — Проверить это правило.

Решение. Расстояние CB (черт. 23) от наблюдателя C до предмета AB в момент появления точки B над горизонтом равно $\sqrt{AB\cdot 2R}$, где R — радиус Земли. Выразив R и AB в морских милях (миля — 6080 футов[1]), получаем выражение:

$$\sqrt{2\cdot\frac{6000\cdot 3500}{6080}\cdot\frac{AB}{6080}} = \text{около } \sqrt{AB},$$

т.-е. правило довольно хорошо подтверждается.

98. Чему равна дальность видимости маяка в 50 метров высоты для наблюдателя, глаз которого помещен близ уровня воды?

Решение. Подставляя в формулу $x=\sqrt{2Rh}$ вместо R — 12800000 метров, а вместо h — 50 метров, получаем: $x=25{,}3$ километра.

99. На каком расстоянии откроется тот же маяк для матроса („марсового“), сидящего на „марсе“ корабля, если глаз его на 15 метров выше уровня воды?

[1]) Морская миля есть длина одной минуты дуги окружности земного шара. Зная, что радиус Земли 6000 верст, учащиеся легко могут вычислить длину морской мили в футах.

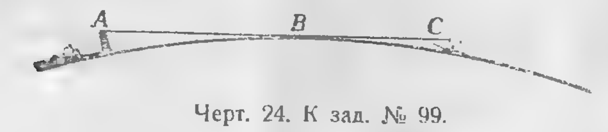
Решение. Сделав соответствующий чертеж, легко видеть (черт. 24), что искомое расстояние AC = сумме двух отрезков AB и BC (касательных), каждый из которых вычисляется по формуле

$$x = \sqrt{2Rh}.$$

Следовательно, искомая дальность видимости равна

$$\sqrt{2R \cdot 50} + \sqrt{2R \cdot 15} = 25{,}3 + 13{,}84 = 39{,}14.$$

Маяк откроется на расстоянии 39 километров от корабля.



Черт. 24. К зад. № 99.

100. Верхушка берегового маяка, высотою 70 метров [1]), замечена над горизонтом матросом, находившимся на марсе, на высоте 20 метров над водой. Вычислить расстояние корабля от маяка.

Решение — такое же, как и предыдущей задачи, от которой настоящая отличается только редакцией.

101. Молния сверкнула в небе, прямо над головой наблюдателя („в зените“) на высоте 2 километров (расстояние легко определить по запаздыванию звука [2]). Как далеко расположены места на

[1]) Высоты всех маяков известны морякам, которые различают маяки по характеру их света (цвет, чередование вспышек).

[2]) Звук проходит километр в 3 секунды, свет же пробегает земные расстояния почти мгновенно. Следовательно, если звук грома слышен через 6 секунд после молнии, то расстояние молнии — 2 километра.

поверхности земли, где та же молния была видна на горизонте?

Решение.

$$x = \sqrt{2R \cdot 2} = 160 \text{ километров}.$$

Так как гром на таком расстоянии уже не слышен, то в указанных местах молния могла лишь наблюдаться, как зарница.

102. С какой высоты можно видеть на 200 километров?

Решение. Из той же формулы: дальность $= \sqrt{2Rh}$, находим, что искомая высота равна

$$\frac{200^2}{12800} = 3{,}125 \text{ километра}.$$

103. Проверить и пополнить следующую таблицу дальности горизонта:

Высота над уровнем моря.	Дальность (радиус поля зрения).
10 метров.	11 *км.*
50 „	? „
? „	36 „
200 „	50 „
? „	196 „
4000 „	? „
5000 „	? „

104. Формулой дальности горизонта можно воспользоваться и для определения (приблизительного) радиуса земного шара, если дальность горизонта на совершенно ровном месте измерена. Во время экскурсии, при благоприятной обстановке, можно попытаться осуществить подобное измерение. Учащиеся должны сами разработать план выполнения этого предприятия.

105. Определить дальность горизонта для человека среднего роста, перенесенного на одну из равнин Луны.

Решение. Принимая радиус Луны равным 1750 *км*, имеем для высоты 1,7 метров дальность горизонта:

$$\sqrt{3\,500\,000 \cdot 1{,}7} = 2\,439 \text{ метров (менее } 2^1/_2 \text{ км).}$$

Возможен еще и такой вариант задач на дальность горизонта: вычислить, какая часть здания известной высоты видна над горизонтом наблюдателя, помещающегося в определенном расстоянии на указанной высоте над почвой? Но после приведенных выше примеров нет надобности останавливаться здесь на рассмотрении всех возможных родов этих задач.

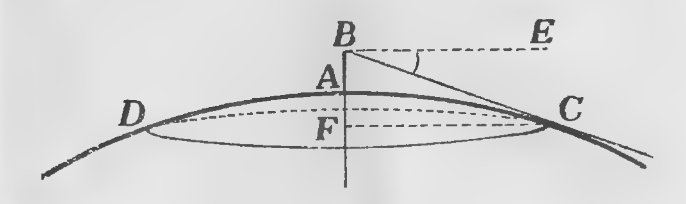
Остается рассмотреть лишь задачу о вычислении понижения горизонта (угла EBC на черт. 25, где BE перпендикуляр к AB, а BC — касательная к дуге AC).

106. Как велико понижение горизонта для наблюдателя, находящегося на вершине Эйфелевой башни? Высота башни 300 метров.

Решение. Угол EBC (черт. 25) = углу BCF, который легко вычислить, если известны BC и BF. Первое есть дальность горизонта для точки B. Второе $= AB + AF = 300$ *м* + стрелка дуги DAC.

$$BC = \sqrt{2R \cdot 300} = \sqrt{12800000 \cdot 300} = \backsim 65 \text{ км.}$$

$$AF = \frac{FC^2}{2R};$$



Черт. 25. К зад. № 106.

так как угол C очень мал, то CF можно принять равным BC, т.-е. дальности горизонта; поэтому

$$\frac{FC^2}{2R} = \frac{BC^2}{2R} = \frac{2R \cdot 300}{2R} = 300 \text{ метров}^{1)}.$$

---

1) Совпадение размеров AB и AF, конечно, не случайно, а обусловлено просто тем, что они вычисляются по одной и той же приближенной формуле. AB можно считать равным AF только до тех нор, пока дуга AC невелнка. Для больших дуг надо при вычислеиии AF пользоваться точной формулой, которую иетрудно вывести следующим образом (черт. 23).

$$BC^2 = AB\,(AB + 2R)$$
$$FC^2 = AF\,(2R - AF)$$
$$\overline{BC^2 - FC^2 = AB^2 + 2R \cdot AB - AF \cdot 2R + AF^2}.$$

Но $BC^2 - FC^2 = BF^2 = (AB + AF)^2 = AB^2 + AF^2 + 2AB \cdot AF$.

Итак: $BF = 300 + 300 = 600$ метров. Искомое понижение горизонта, в виду малости этого угла, равно:

$$\frac{0{,}6 \cdot 360 \cdot 60}{2\pi \cdot 65} = 31{,}6' \text{ или около } 1/2^\circ.$$

Еще два замечания.

Решая задачу № 106, мы попутно убедились, что при небольшом возвышении наблюдателя над земной поверхностью, высота (AF) обозреваемого им шарового сегмента равна возвышению наблюдателя. Это дает простой способ вычислять поверхность видимой наблюдателем части земного шара: как поверхность шарового сегмента, она равна окружности земного шара, умноженной на высоту сегмента, — или, что то же самое, на высоту наблюдателя. Например, с высоты 100 метров, или 0,1 километра видна поверхность величиною в

$$40\,000 \times 0{,}1 = 4\,000 \text{ кв. километров.}$$

Человек среднего роста обозревает поверхность

$$\text{в } 40\,000 \times 0{,}0017 = 68 \text{ кв. километров.}$$

Следовательно:

$$AB^2 + AF^2 + 2AB \cdot AF = AB^2 + 2R \cdot AB + AF \cdot 2R + AF^2$$

По сокращении членов AB^2 и AF^2, имеем

$$2AB \cdot AF - 2R \cdot AF = 2R \cdot AB$$
$$AF\,(AB + R) = AB \cdot R,$$

откуда

$$AF = \frac{AB \cdot R}{AB + R}.$$

Эта формула дает возможность точно вычислять величину обозреваемой поверхности ($2\pi R \cdot AF$), если известно возвышение AB наблюдателя над землей.

С Эйфелевой башни видна поверхность в 12 000 километров [1]), и т. д.

Второе замечание касается той замены катета гипотенузой (BC вместо CF), которую мы сделали в задаче № 106. Легко показать учащимся, что даже при не очень малых углах разность между катетом и гипотенузой становится весьма незначительной. Так, при разности между гипотенузой и катетом в 0,01 — короткий катет составляет

$$\sqrt{1^2 - 0{,}99^2} = \sqrt{1{,}99 \cdot 0{,}1} = 0{,}141,$$

т. е. почти 1/7 долю гипотенузы — что соответствует углу в $\frac{57^\circ}{7}$, или около 8°, углу еще довольно большому. При разности между гипотенузой и катетом в 0,001 короткий катет составляет

$$\sqrt{1^2 - 0{,}999^2} = \sqrt{1{,}999 \cdot 0{,}001} = 0{,}043;$$

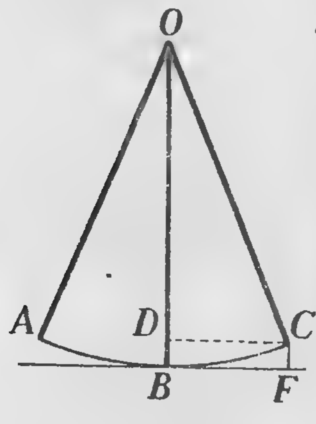
такой наклон не допускается на железных дорогах, как слишком крутой (он соответствует углу в $57^\circ \cdot 0{,}043 = 2{,}4^\circ$). Мы видим, следовательно, что даже при углах не весьма малых, разность между гипотенузой и бо́льшим катетом практически исчезает [2]).

[1]) Легко понять, что обозреваемая **поверхность пропорциональна высоте наблюдателя**, — что и следовало ожидать, так как поверхность эта пропорциональна квадрату дальности горизонта (радиуса круга), а последняя — квадратному корню из высоты.

[2]) К вычислению дальности горизонта относятся также задачи этой книги №№ 92, 111, 112, 122, 129, 130.

3. Радиус кривизны.

О способе вычисления радиуса кривизны дорожного закругления уже говорилось выше (см. задачи № 33 и 34). Остается добавить лишь, что тем же приемом можно вычислить радиус кривизны вогнутого зеркала, часового или очешного стекла, вогнутой чашки, свода и т. п., если считать их поверхность частью шаровой. Необходимые данные—длину хорды и стрелки — находят прямым измерением.



Черт. 26.

Подобным же образом можно вычислить (черт. 26) высоту CF поднятия конца C маятника над средним его положением в B, если известны длина маятника и угол отклонения от отвесной линии (обыкновенно не превышающий нескольких градусов). Например: конец маятника длиною в 1,5 метров, отклонившись на 5°, возвышается над своим низшим положением на

$$CF = DB = \frac{\overline{DC}^2}{2 \cdot OB} = \frac{\smile BC^2}{3} \quad ^{1)}.$$

¹) Мы уже показали, что при небольших углах практически допустимы такие замены.

Длина дуги BC, заключающей 5°, $= \frac{\pi \cdot 3 \cdot 5}{360} =$ $= 0{,}13$ метра.

Следовательно

$$CF = \frac{0{,}13^2}{3} = 0{,}0056 \text{ метра} = 5{,}6 \text{ миллиметра}.$$

Такого рода задачи полезно проделывать с данными, полученными учащимися путем непосредственных измерений, т.-е. выполнять их в натуре. Обычно большинство подобных упражнений принято относить к физике; но геометрический элемент в них настолько преобладает над физическим, что уместнее заниматься ими в связи с курсом геометрии.

К вычислению радиуса кривизны относятся также упражнения этой книги №№ 23, 33 — 36.

4. Диаграммы.

Графическое изображение разнообразных статистических, географических и иных данных может быть успешно использовано для геометрических упражнений, способствуя в то же время и закреплению в памяти тех или иных чисел и соотношений. Само собою разумеется, что для геометрических целей совершенно безразлично, к чему относятся выбранные числовые данные — к величине материков, к численности населения, к протяжению железных дорог, к расходам на образование или к добыче ископаемых. Это дает возможность чрезвычайно разнообразить задания. А так как и

самое изображение заданных чисел графически может быть выполнено тоже несколькими приемами, то упражнения рассматриваемого типа можно варьировать почти до бесконечности.

Если ставится условие изобразить данные числа площадями квадратов или кругов — учащимся понадобится вычислить сторону квадрата или радиус круга по данным их площадям. Если требуется изобразить числа площадями равносторонних треугольников, задача сведется к вычислению стороны равностороннего треугольника по его площади. Если соотношения чисел должны быть иллюстрированы площадями секторов одного и того круга — нужно будет вычислять в градусной мере соответственные дуги, — и т. д. Представление статистических данных в виде объемов тел (напр. кубов или шаров) убедит учащихся в неправильности многих обычно встречающихся диаграмм, составители которых упускают из виду, что объемы подобных тел пропорциональны кубу их линейных протяжений. Полезна и проверка готовых диаграмм вроде, например, следующей:

107. Расходы одного ведомства составляли в 1907 г. 1 397,1 тыс. рублей, а в 1912 г. — 2 354,7 тыс. рубл. Величина этих расходов была представлена на прилагаемой диаграмме (черт. 27) в виде денежных шкафов различных размеров. Правильно ли это изображение?

Решение. Шкафы на диаграмме имеют пропорциональные друг другу линейные протяжения (ширину, высоту); следовательно их объемы, т.-е. числа, подлежащие иллюстрированию, должны относиться, как кубы линейных протяжений этих шкафов. Измерив ширину шкафов (20 *мм* и 26 *мм*), убеждаемся что отношение их кубов $10^3 : 13^3 =$ $= 1\,000 : 2197$, т.-е. не равно отношению чисел 1 397,1 : 2 354,2. Следовательно, размеры шкафов выбраны на диаграмме неудачно (повидимому, составитель диаграммы соразмерял с числами площади изображения шкафов, а не объемы изображаемых шкафов). Точно так же не отвечает требуемым размерам и высота шкафов.



Черт. 27. К зад. № 107.

Диаграмма расходов: налево — 1397,1 тыс. руб., направо—2354.7 тыс. руб.

Преимущества и недостатки различных способов изображения видны из следующего упражнения:

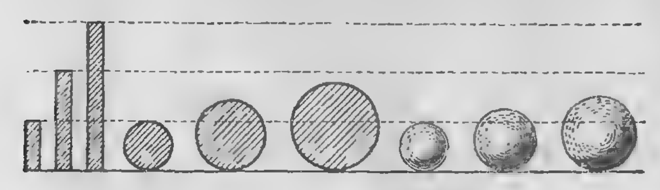
108. Представить отношения 1 : 2 : 3 трояко:

1) в виде отношений длин отрезков;
2) в виде отношений площадей кругов;
3) в виде отношений объемов шаров.

Решение видно из чертежа 28-го. Диаметры кругов относятся как $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$, т.-е. как 1 : 1,41 : 1,76, а диаметры шаров как $1 : \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{3}$, т.-е. как 1 : 1,26 : 1,44.

Задача показывает, между прочим, что изображение статистических чисел в виде объемов тел не отличается достаточною наглядностью.

Этими немногими замечаниями можно ограничиться, так как разработка упражнений указанного рода никаких особых затруднений не представляет.



Черт. 28. К зад. № 108.

Напомним лишь, что сюда же можно отнести и графическую иллюстрацию (или даже обоснование) некоторых алгебраических формул, — например:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

а также и арифметических приемов, вроде следующего:

$$35^2 = 3 \times 4 \times 100 + 25$$
$$65^2 = 6 \times 7 \times 100 + 25$$
$$85^2 = 8 \times 9 \times 100 + 25$$

и т. п.

(См. также далее, § 6 настоящей главы: Действия с числами, близкими к единице).

5. Извлечение квадратного и кубичного корней.

Изучение геометрии часто опережает прохождение курса алгебры настолько, что учащимся приходится находить квадратные и кубичные корни ранее, нежели они знакомятся с соответствующими приемами на уроках алгебры. Но откладывать из-за этого выполнение соответствующих геометрических упражнений не следует. Существуют довольно удобные (не только как временные суррогаты, но и сами по себе) приемы вычислений квадратного корня помимо способа, указываемого в учебниках алгебры. Таков метод, известный под названием „способа двух средних“ — старинный прием, восходящий к Герону Александрийскому. Объясним его на нескольких примерах:

Найдем $\sqrt{13}$. Результат, очевидно, заключается между 3 и 4 и, следовательно, выражается 3 с дробью. Возьмем наудачу 3,5 и испытаем, является ли это число искомым квадр. корнем. Для этого делим 13 : 3,5; получаем 3,71. Следовательно, $13 = 3,5 \times 3,71$. Искомый корень заключается, очевидно, между этими множителями. Находим средне-арифметическое между ними, т.-е. 3,605 и делим на него 13; получаем 3,607. Итак, 13 =

$3{,}605 \times 3{,}607$. Искомый корень находится между обоими множителями и их общие цифры — 3,60 принадлежат ему несомненно. Значит приближенное значение $\sqrt{13} = 3{,}60$, и отличается от истинного только в третьем десятичном знаке. Еще точнее значение $3{,}606 = \frac{3{,}605 + 3{,}606}{2}$.

Найдем $\sqrt{500}$. Так как искомый корень, очевидно, близок к 20 [1]), то делим 50 : 20, и берем среднее между обоими множителями; $\frac{20 + 25}{2} = 22{,}5$. Далее поступаем попрежнему: $500 : 22{,}5 = 22{,}2$; $\frac{22{,}5 + 22{,}2}{2} = 22{,}35$; $500 : 22{,}35 = 22{,}37$; $500 : 22{,}36 = 22{,}36$. Итак $\sqrt{500} = 22{,}36$, — с точностью до третьего десятичного знака.

Найдем $\sqrt{0{,}7}$. Так как $0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$, то начнем испытания с 0,8; $0{,}7 : 0{,}8 = 0{,}87$; $\frac{0{,}8 + 0{,}87}{2} = 0{,}835$; $0{,}7 : 0{,}855 = 0{,}837$. Следов., $\sqrt{0{,}7} = 0{,}836$.

Необходимо сообщить учащимся, что корень из произведения равен произведению корней, а корень из дроби равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя. Поэтому извлечение корня значительно упрощается, если число разлагается на два множителя, из которых один есть квадрат целого числа или дроби.

---

[1]) Первое грубое приближение выбирается произвольно: тот или иной выбор его не влияет на окончательный результат.

Например:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}; \quad \sqrt{700} = 10\sqrt{7}; \quad \sqrt{0{,}05} = \sqrt{5 \cdot 0{,}01} = 0{,}1\sqrt{5}; \quad \sqrt{\frac{8}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{2}.$$

Для ускорения вычислений полезно дать ученикам (или, еще лучше, предложить им самим составить коллективно) таблицу квадратных корней из чисел от 1-цы до 1000, хотя бы и неполную: от 1-цы до 100 полную, от 100 до 140 — через каждые 5 чисел, от 140 до 800 — через каждые 10, от 800 до 900 - через 20, и наконец корни из 900 и 1000. Числа, которых нет в этой таблице, либо разлагают на множители, имеющиеся в таблице, либо находят кв. корень из них, отыскивая соответствующее число между корнями тех двух чисел таблицы, между которыми заключается данное число; при этом считают, что разность корней пропорциональна разности чисел (для приближенных вычислений это допустимо). Пусть, напр., надо найти $\sqrt{234}$. В таблице имеются:

$$\sqrt{230} = 15{,}166; \quad \sqrt{240} = 15{,}492.$$

Мы видим, что разности чисел в 10 единиц отвечает разность в корнях, равная 0,326. Значит разности 234 — 230, т.-е. в 4 единицы, должна отвечать разность в корнях $0{,}326 \times \frac{4}{10} = 0{,}13$.

И следовательно,

$$\sqrt{234} = 15{,}166 + 0{,}13 = 15{,}296.$$

Другой пример:

$\sqrt{15837}$. Мы можем представить его в виде $\sqrt{158,37 \times 100} = 10 \times \sqrt{158,37}$, а приближенно,

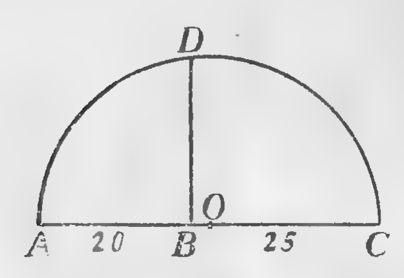
$$10 \times \sqrt{158}.$$

Находим $\sqrt{158}$ по способу сейчас указанному; получаем 12,56.

Следовательно,

$\sqrt{15837} = 10 \times \sqrt{158} = 10 \times 12,56 = 125,6.$

Наконец, можно пользоваться и графическим приемом извлечения квадратного корня, — т. - е. построением геометрического среднего. Например, чтобы найти $\sqrt{500}$ откладываем (черт. 29) $AB = 20$ единицам (в произвольном масштабе) и на продолжении его $BC = 25$ единицам длины. Из середины O отрезка AC описываем полуокружность ADC. Число единиц длины в перпендикуляре BD есть искомый $\sqrt{500}$. (Практически восставляют в точке B перпендикуляр и из O засекают дугу радиусом OA,—см. черт. 38). То же построение можно выполнить и при другом выборе отрезков AB и BC — напр., 10 и 50. Для графического построения $\sqrt{13}$ можно взять отрезки 1 и 13, 2 и 6,5 и т. п.



Черт. 29. Графическое извлечение квадратного корня.

Учащимся интересно будет результаты графического приема проверять вычислением.

„Арифметического" приема извлечения кубичного корня не существует, и учащимся, не знакомым с алгеброй, остается лишь прибегать к услугам таблички кубичных корней из чисел от 1 до 1000 (с указанными выше пропусками). Нахождение корня из числа, не содержащегося в таблице, выполняется так же, как и для корня квадратного.

Пример:

Найти $\sqrt[3]{15672}$.

$\sqrt[3]{15672} = \sqrt[3]{1000 \cdot 15,672} =$
$= 10\sqrt[3]{15,7}$; так как $\sqrt[3]{15,7} =$
$= 2,50$ (см. вычисление направо),
то $10\sqrt[3]{15,7} = 25$.

Итак $\sqrt[3]{15672} = 25$.

Действительно:

$25^3 = 15625$; разница менее 0,3%.

Нахождение $\sqrt{15,7}$:

15	. . .	2,46
16	. . .	2,52
1	. . .	6
0,7	. . .	4,2
15,7	. . .	2,50

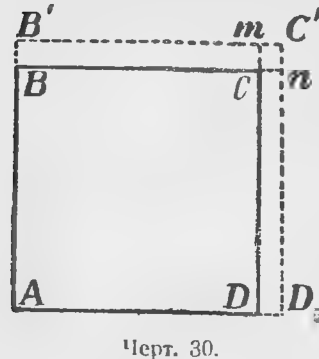
Другие способы извлечения корней указаны в конце следующего параграфа.

6. Действия с числами, близкими к единице.

При решении практических задач нередко приходится производить вычисления с числами, близкими к единице (например, делить на 0,995, или извлечь квадратный корень из 1,03). Такие действия, если выполнять их по общим правилам,

утомительны и кропотливы. Чтобы ускорить подобные выкладки при решении геометрических задач, чрезвычайно полезно познакомить учащихся с сокращенными приемами выполнения таких вычислений, дающими приближенные результаты с достаточной для практики точностью. Приемы эти, к тому же, могут быть обоснованы геометрически.

Умножение. Пусть требуется перемножить два близких к 1-це числа $1+a$ и $1+b$, где a и b весьма малые дроби. Построив (черт. 30) квадрат $ABCD$, сторона которого принята за единицу, удлиняем одну сторону на $BB'=a$ другую на $DD'=b$. Прямоугольник $AB'C'D'$ имеет площадь, равную $(1+a)\ (1+b)$, которая больше площади квадрата $ABCD$, т.-е. 1-цы, на сумму прямоугольников $BCmB'$, $CDD'n$ и $CmC'n$. Площадью последнего, $CmC'n$, как относительно весьма малою, пренебрегаем, и получаем, следовательно:



Черт. 30.

$(1+a)\ (1+b)$ приближенно $=1+BC\cdot a+CD\cdot b=$
$=1+a+b$ (так как $BC=CD=1$).

Таким же образом, можно показать, что приближенно

$$(1+a)\ (1-b)=1+a-b,$$

и что вообще

$$(1\pm a)\ (1\pm b)=1\pm a\pm b.$$

Покажем, как пользоваться этою формулой для численных выкладок:

$1{,}003\times1{,}005=1{,}008$ $\qquad$ $1{,}002\times0{,}998=1$
$1{,}0008\times0{,}9994=1{,}002$ $\qquad$ $0{,}999\times0{,}997=0{,}996.$

Тою же формулой пользуются и для ускоренного выполнения таких, например, вычислений:

$$2{,}006\cdot7{,}021=2\cdot7\cdot1{,}003\cdot1{,}003=14\cdot1{,}006=14{,}084.$$

$$5{,}0011\cdot3{,}0043=5\cdot1{,}00022\cdot3\cdot1{,}0014=15\cdot1{,}0016\ 15{,}024.$$

Деление. Так как, согласно предыдущему, $(1+a)\ (1-a)$ приближенно равно $1+a-a=1$, то

$$\frac{1}{1+a}=1-a,\ \text{и}\ \frac{1}{1-a}=1+a.$$

Например:

$$\frac{1}{1{,}007}=0{,}993;\ \frac{1}{0{,}992}=1{,}008,\ \text{и т. д.}$$

$$\frac{3}{6{,}0012}=\frac{3}{6\cdot1{,}002}=\frac{1}{2}\cdot0{,}998=4{,}999.$$

Далее:

$$\frac{1\pm a}{1\pm b}=(1\pm a)\cdot\frac{1}{1\pm b}=(1\pm a)\ (1\mp b)=1\pm a\mp b.$$

Например:

$$\frac{0{,}994}{1{,}012}=1-0{,}06-0{,}012=0{,}982$$

$$\frac{1{,}02}{1{,}07}=1+0{,}02-0{,}07=0{,}95.$$

Возвышение в степень. Согласно предыдущему, имеем

$$(1\pm a)^2=1\pm 2a$$

$$(1\pm a)^3=(1\pm a)(1\pm a)(1\pm a)=(1\pm 2a)(1\pm a)=$$
$$=1\pm 3a,\ \text{и вообще}$$

$$(1\pm a)^n=1\pm na.$$

Например:

$$1{,}004^2=1{,}008;\ 0{,}98^3=(1-0{,}02)^3=0{,}94\ ^{1)}.$$
$$107^2=(100\cdot 1{,}07)^2=10000\cdot 1{,}14=11400\ ^{2)}.$$

Извлечение корня. Читая предыдущие формулы справа налево имеем

$$\sqrt{1\pm 2a}=1\pm a;\ \sqrt[3]{1\pm 3a}=1\pm a, \text{— т.-е.}$$

$$\sqrt{1\pm b}=1\pm\frac{b}{2}\qquad \sqrt[3]{1\pm b}=1\pm\frac{b}{3}.$$

Например:

$$\sqrt{1{,}006}=1{,}003;\ \sqrt[3]{1{,}006}=1{,}002.$$

$$\sqrt{993}=\sqrt{1-0{,}007}=1-\frac{0{,}007}{2}=0{,}9965.$$

$$\sqrt[3]{993}=1-\frac{0{,}007}{3}=0{,}9976.$$

$$\sqrt{4{,}16}=\sqrt{4.1{,}04}=2\sqrt{1{,}04}=2.1{,}02=2{,}04.$$

$$\sqrt{106}=10\sqrt{1{,}06}=10.1{,}03=10{,}3.$$

1) Истинный результат 0,941192.
2) Истинный результат 11449.

Одновременное пользование всеми приемами значительно ускоряет выполнение, например, таких вычислений:

$$\frac{0{,}094\cdot 1{,}05}{0{,}993^2\sqrt[3]{1{,}006}}=\frac{1{,}044}{0{,}986\cdot 1{,}002}=\frac{1{,}044}{0{,}988}=1{,}032.$$

То же вычисление, выполненное обычным порядком (или даже помощью логарифмов), отняло бы гораздо больше времени, при весьма малой выгоде в смысле точности.

Покажем еще, как можно, пользуясь этими приемами, находить квадратные и кубичные корни из чисел, близких к точным квадратам и кубам.

$$\sqrt{80}=\sqrt{81-1}=\sqrt{81\left(1-\frac{1}{81}\right)}=9\sqrt{1-\frac{1}{81}}=$$
$$=9\left(1-\frac{1}{162}\right)=9.0{,}00617=8{,}9447.$$

$$\sqrt{53}=\sqrt{49+4}=\sqrt{49\left(1+\frac{4}{49}\right)}=7\left(1+\frac{2}{49}\right)=$$
$$=7.1{,}02=7{,}28\ ^{1)}.$$

$$\sqrt[3]{119}=\sqrt[3]{125-6}=\sqrt[3]{125-\left(1-\frac{6}{125}\right)}=$$
$$=5\left(1-\frac{2}{125}\right)=5-0{,}08=4{,}92$$

$$\sqrt[3]{352}=\sqrt[3]{343+9}=\sqrt[3]{343\left(1+\frac{9}{343}\right)}=$$
$$=7+\frac{3}{49}=7{,}06.$$

1) В таблице находим: $\sqrt{80}=8{,}944$; $\sqrt{53}=7{,}28$.

7. Некоторые применения предыдущих приемов.

Возвращаясь к прежде решенным задачам, можно указать целый ряд случаев, когда вычисления значительно упростились бы при пользовании сейчас указанными приемами. В задаче № 12 вычисление уменьшения поверхности шара, диаметр которого сократился на $\frac{4}{80}$, сводится к вычислению $\left(1 - \frac{1}{20}\right)^2$; последнее равно $1 - \frac{1}{10} = 0{,}9$; следовательно уменьшение составляет 0,1 первоначальной поверхности и равно $\frac{1}{10}\pi 8^2 =$ около 20 кв. сантиметров.

В задаче № 21 можно было вычислить $\sqrt{98}$, не заглядывая в таблицы:

$$\sqrt{98} = \sqrt{100 - 2} = 10\sqrt{1 - 0{,}02} = 10 \, . \, 0{,}99 = 9{,}9.$$

В задаче № 49 надо было вычислить $\sqrt[3]{\frac{6 \, . \, 65}{3{,}1416}}$.

Выполняем его так

$$\sqrt[3]{\frac{6 \, . \, 65}{3{,}1416}} = \sqrt[3]{\frac{2 \, . \, 65}{1{,}0472}} = \frac{\sqrt[3]{130}}{1{,}016} = \frac{\sqrt[3]{125 + 5}}{1{,}016} =$$

$$= \frac{5\sqrt[3]{1 + \frac{1}{25}}}{1{,}016} = \frac{5 \, . \, 1{,}013}{1{,}016} = 5 \, . \, 0{,}997 = 4{,}985.$$

В задаче № 83 можно было вычислить $\sqrt{300}$ так:

$$\sqrt{300} = \sqrt{289 + 11} = 17\sqrt{1 + \frac{11}{289}} =$$

$$17 \, . \left(1 + \frac{11}{578}\right) = 17{.}3.$$

Вообще многие геометрические задачи, требующие, при обычном способе выполнения действий, длинных выкладок, значительно упрощаются при пользовании указанными сейчас приемами.

Рассмотрим несколько примеров.

109. Куб. сажень = 9,7 куб. метра. Какую долю куб. сажени составляет 1 куб. метр?

Решение:

$$\frac{1}{9{,}7} = \frac{1}{10 \, . \, 0{,}97} = 0{,}1 \, . \, 1{,}03 = 0{,}103.$$

Точно так же, если 1 километр = 0,94 версты, то 1 верста $= \frac{1}{0{,}94} = 1{,}06$ километра. Если десятина = 1,09 гектара, то гектар $= \frac{1}{1{,}09} = 0{,}91$ десятины. Если кв. метр = 10,8 кв. фут., то 1 кв. фут $= \frac{1}{10{,}8} = \frac{1}{10 \, . \, 1{,}08} = 0{,}1 \, . \, 0{,}92 = 0{,}092$ кв. метра, и т. п.

110. При обмере угодий в усадьбе получены были следующие результаты:

пахотной земли . . . . 150 десятин
леса . . . . 112,5 „
луга . . . . 50 „

После обмера было обнаружено, что мерная цепь вытянута и заключала на 16,8 дюйма больше, чем 10 сажен. Как следует исправить результаты измерения?

Решение. Если цепь заключала на 16,8 дюйма больше, чем 10 сажен или 840 дюймов, то значит все полученные линейные протяжения преувеличены на $\frac{16,8}{840}=\frac{1}{200}$; их истинные размеры составляют $1-\frac{1}{200}$ полученных. Истинные же площади меньше полученных в отношении $\left(1-\frac{1}{200}\right)^2:1$, т. е. составляют $1-\frac{2}{200}=0,99$ их. Следовательно, все числа нужно уменьшить на 0,01.

111. При обмере кубатуры (объема) корабельного трюма пользовались метром, который, как впоследствии обнаружилось, был на $^1/_2$ сантиметра короче истинного метра. Как надо изменить результат, чтобы получить правильную кубатуру?

Решение. Истинные линейные размеры больше полученных на $^1/_2$%; следовательно, объем меньше истинного в отношении

$$\left(1-\frac{1}{200}\right)^3:1=\left(1-\frac{3}{200}\right):1=0,985.$$

Результат измерения следует уменьшить на $1^1/_2$%.

Знание соотношения между небольшими приращениями корня и степени важно для уяснения многих геометрических зависимостей. Небольшая процентная прибавка к радиусу шара вызывает двойную прибавку (в %%) к поверхности и тройную — к объему. — и т. п. Вот еще примеры:

112. Возвышение наблюдателя над землей увеличилось на 1%. На сколько процентов увеличилась дальность его горизонта?

Решение. Так как дальность пропорциональна квадр. корню из высоты ($\sqrt{2Rh}$), то при увеличении высоты на 1%, она увеличивается всего на $^1/_2$% (так как $\sqrt{1,01}=1,005$). Но поверхность видимой части земли возростает на 1%, так как она пропорциональна квадрату дальности.

113. В январе земной шар на 7 миллионов километров ближе к Солнцу, нежели в июле. Какова разница в силе солнечного освещения, если известно, что сила освещения убывает пропорционально квадрату расстояния? Среднее расстояние от Земли до Солнца — 150 миллионов километров.

Решение. Изменение расстояния составляет около $\frac{1}{20}$ или 5%. Следовательно, изменение силы света составит 10%, так как $(1,05)^2=1,1$.

8. Вычисления с π.

Для быстрых, особенно устных, вычислений длины окружности или поверхности и объема круглых тел, когда особой точности не требуется,— например, во время экскурсий — весьма неудобно пользоваться даже такими выражениями π, как $3^1/_7$ или 3.14. Полезно поэтому показать учащимся более удобный прием вычислений, объяснив, как велика получающаяся при этом погрешность.

Простейшее и древнейшее приближение к π, именно 3, погрешает вовсе не так значительно, как большинство учащихся склонно думать. Отбрасывая 0,14 от 3,14, мы совершаем относительную ошибку в $\frac{14}{314}$, т.-е. менее 5%, при том в заранее известную сторону (преуменьшения)—значит, легко поправимую. Это значит, что при вычислении длины окружности, поверхностей и объемов круглых тел можно принимать $\pi = 3$, если полученные результаты увеличивать на 5% (точнее на $\frac{14}{300}$, или на 4,7%). Находить же 5%, т.-е. половину от десятой доли $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20} = 5\%\right)$, очень легко даже устно.

При таком приеме обычные формулы, заключающие π, получают следующие упрощения:

длина окружности. . . . . $6r$
площадь круга. . . . . . . $3r^2$
(или $\frac{3}{4}D^2$, т.-е. $\frac{3}{4}$ площади квадрата такой же ширины)

боковая поверхность цилиндра . . $6rh$
боковая поверхность конуса. . . . $3rl$
объем цилиндра . . . . $3r^2h$
($^3/_4$ объема описанного прямоугольного параллелепипеда.)
объем конуса. . . . . r^2h
поверхность шара . . . . $12r^2$, или $3D^2$
объем шара . . . . $4r^3$ или $\frac{1}{2}D^3$,
(т.-е. $^1/_2$ объема куба такой же ширины).

Каждый полученный по этим формулам результат нужно увеличить на 5%.

Другими словами, мы принимаем при подобных вычислениях $\pi = 3 + 3 . 0,05 = 3,15$, т.-е. делаем ошибку в сторону преувеличения на $^1/_{314}$, или 0,003 (0,3%).

Примеры. **114**. Найти объем бревна, средняя толщина которого 2 дециметра, а длина 21 дециметр (одна сажень).

Решение выполняется устно. Находим объем бруса такой же ширины; он равен $2 . 2 . 21 = 84$; берем $^3/_4$ его, т.-е. отнимаем $^1/_4$ его — получаем $84 - 21 = 63$. Прибавляем 5%:

$$63 + \frac{6,3}{2} = 63 + 3,15 = 66,15, \text{ т.-е. } 66 \textit{ куб. дм.}$$

115. Найти поверхность и объем земного шара, зная что диаметр его 13 000 километров.

Решение. Поверхность $= 3D^2 = 3 . 169 . 1000^2 =$ около 510 миллионов *км*.

Объем земного шара $= \frac{1}{2} \cdot 13000^3 = 1\,097$ миллиардов *куб. км* (поправки в 5% не вводим, так как диаметр, 13 000 *км*, был взят с преувеличением).

116. Найти объем километра проволоки в $1\frac{1}{2}$ миллиметра толщиной.

Решение.

$$\frac{3}{4}D^2h = \frac{3}{4}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot 1000000 = \frac{27 . 1000000}{16} \text{ мм.}$$

или около $1\frac{3}{4}$ куб. дециметра в грубом приближении, а точнее 1,6 *куб. дм.*

9. Исторические задачи.

Особый род поучительных и интересных для учащихся упражнений составляет проверка старинных геометрических приемов, сохранившихся в памятниках математической литературы. В сочинениях по истории математических наук можно подыскать довольно много таких упражнений. В моем „Задачнике“ приведено их больше дюжины. Пополняю их здесь ещё несколькими.

117. Чтобы построить прямой угол на местности, древние индусы строили на земле треугольник с отношением сторон 5 : 12 : 13 или 8 : 15 : 17. Получался ли при этом прямой угол и против какой стороны?

Решение вытекает из равенств:

$$5^2 + 12^2 = 13^2; \quad 8^2 + 15^2 = 17^2.$$

Прямой угол лежит против сторон в 13 и 17 единиц.

118. В сочинении Архимеда „О сфере и цилиндре“ находим следующие утверждения:

„Шар (по объему) в 4 раза больше конуса, который имеет основанием большой круг этого шара и высота которого равна радиусу этого шара“.

„Цилиндр, основанием которого служит большой круг шара, а высота равна его диаметру, в полтора раза больше (по объему), чем шар“.

Показать справедливость этих утверждений [1]).

Решение вытекает непосредственно из условия задачи, если выразить объем упоминаемых в задаче конуса и цилиндра соответствующими формулами. Для конуса имеем (обозначив радиус шара через r):

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right).$$

Для цилиндра:

$$\pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right).$$

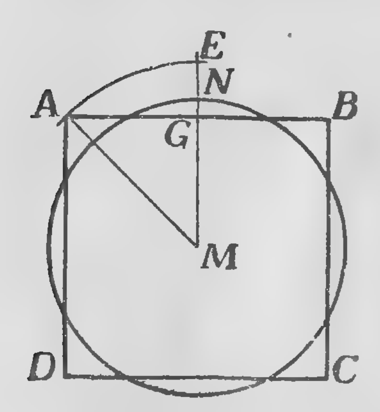
119. Герону Александрийскому приписывают следующее приближенное выражение для площади равностороннего треугольника со стороной a: она равна $^{13}/_{30}\, a^2$. Проверьте это правило.

---

[1]) Архимед, по преданию, завещал изобразить на своей могиле следующее: отношения между объемами шара, конуса, у которого высота и радиус основания равны диаметру этого шара, и цилиндра, у которого радиус основания равен диаметру, а высота — радиусу этого шара, — выражаются числами 1 : 2 : 3. Нетрудно вывести с учащимися это отношение из формул объема.

Решение. Площадь равностороннего треугольника $= \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = 0{,}432 a^2$. Героново выражение $^{13}/_{30}\, a^2 = 0{,}433\, a^2$, т.-е. отличается от него менее чем на $^1/_{400}$ или $^1/_4\%$.

Исторические задачи могут быть и иного рода, как видно из следующего примера:



Черт. 31. К зад. № 120.

120. В древне-индусском сочинении по математике находим следующий способ черчения круга, равновеликого данному квадрату. Если, например (черт. 31), нужно начертить круг, равновеликий квадрату $ABCD$, то из центра квадрата M радиусом MA описываем дугу AE до пересечения с ME. Отрезок EG делим на три равных части ($GN = ^1/_3\, EG$) и из центра M радиусом MN описываем окружность. „Сколько отсекается от углов, столько прибавляется сегментами", т.-е. начерченный круг равновелик квадрату.

Проверить это правило.

Решение. Радиус начерченного круга

$$MN = MG + \frac{1}{3}(ME - MG) = \frac{2}{3} MG + \frac{1}{3} AM =$$

$$= \frac{2}{3} MG + \frac{1}{3} MG \sqrt{2} = MG \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} AB \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = AB \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{6} = 0{,}569.\ AB.$$

Площадь круга с таким радиусом $= 1{,}02\, AB^2$, т.-е. на 2% больше площади квадрата со стороною AB. Следовательно, способ дает преувеличение на 2%.

121. Предполагают [1]), что древние египтяне определяли отношение длины окружности помощью следующего опыта. Заготовляли два сосуда: один в форме прямого цилиндра, другой в форме квадратной призмы, при чем внутренний диаметр цилиндра равнялся стороне квадрата (внутреннего). Наполнив цилиндр водой и заметив высоту уровня воды, переливали ее в призматический сосуд и также замечали высоту. Из отношения этих высот выводили, чему равно отношение длины окружности к диаметру. Как по этим данным установить искомое отношение?

Решение. Обозначив диаметр цилиндра через d, высоту воды в нем через H, а высоту воды в призматическом сосуде через H', имеем, что объем водяного цилиндра $= \frac{1}{4} \pi d^2 H$, а равного ему призматического столба — $d^2 H'$. Так как

$$\frac{1}{4} \pi d^2 H = d^2 H',$$

---

[1]) Проф. М. Симон. „Дидактика и методика математики"

то

$$\frac{\pi}{4} H = H',$$

и следовательно,

$$\pi = \frac{4H'}{H}.$$

Рассказывая учащимся о неразрешимости проблемы квадратуры круга, полезно указать на то, что *практически* разрешение этой задачи ничего не изменило бы в способе вычисления площади круга, так как π вычислено с такою точностью, которая далеко превосходит самые строгие требования практики. „Можно получить — говорит *Араго* — площадь круга, имеющего радиус 150 миллионов километров (расстояние от Земли до Солнца), с точностью до величины мельчайшей пылинки“.

Учащиеся, без сомнения, с большим интересом проследят за следующими соображениями великого французского астронома. Указав на то, что *Шенкс* вычислил π с 530 десятичными знаками [1]), Араго говорит:

„Посмотрим, с какою степенью приближения возможно вычислить длину окружности, имеющей радиусом среднее расстояние Земли от Солнца. Это расстояние равняется 150.000.000.000 метров.

„Одна единица погрешности в первом десятичном знаке [после запятой] числа, выражающего отношение окружности к диаметру, вызовет в

[1]) В 1873 г., после смерти Араго, Шенкс довел вычисление до 707-го знака.

определении длины окружности ошибку, равную 0,1 диаметра [2]), или 30 миллиардов метров.

„Единица погрешности во втором десятичном знаке даст погрешность в длине в 0,01 диаметра, или 3 миллиарда метров.

„Единица погрешности в третьем десятичном даст погрешность длины в 300 миллионов метров.

„Продолжая итти тем же путем, найдем, что единица погрешности в шестом десятичном знаке породит погрешность в 300.000 метров.

„Допустив погрешность в одну единицу в 9-м десятичном знаке, получим погрешность длины в 300 метров.

„Единица погрешности в 12-й цифре отразится в длине окружности погрешностью в 0,3 метра.

„Единица погрешности в 15-й цифре вызовет погрешность в определении длины в 0,2 миллиметра.

„Взяв 18 цифр для π и допустив в последней цифре ошибку в одну единицу, получим в определении длины окружности погрешность в 0,0003 миллиметра, т.-е. гораздо меньше толщины волоса.

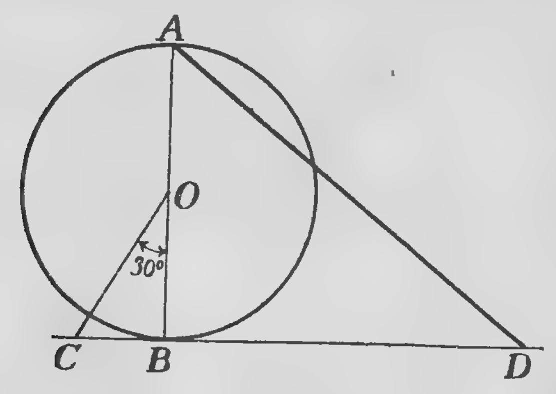
„Мы остановились на 18-й цифре. Можно представить себе, какую невообразимо малую погрешность совершили бы мы, несмотря на огромность взятой нами окружности, если бы вычислили ее длину помощью еще более точных приближений π.

„Итак, в смысле точности, мы ничего не выиграли бы, если бы между длиною окружности и диаметра существовало отношение, выражающееся числом вполне точно“.

[2]) Учащиеся должны указать основание этого утверждения.

Поучительно также рассмотреть с учащимися и весьма простой графический способ выпрямления окружности с чрезвычайно малой погрешностью; способ, указанный Адлером, ясен из черт. 32.

Прямая OC проведена под углом 30° к OB, и от точки C ее пересечения с перпендикуляром CD к AB откладывают $CD = 3$ радиусам окружности.



Черт. 32. К зад. № 121.

Длина прямой AD равна длине полуокружности O с весьма малой погрешностью.

Действительно:

Отрезок $CB = \frac{r\sqrt{3}}{3}$, где r — радиус окружности.

$$BD = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Из прямоугольного треугольника ABD имеем:

$$AD = \sqrt{4r^2 + \left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 3{,}14153r,$$

тогда как $\pi = 3{,}141593\ldots$ Ошибка менее $0{,}02\%$. При радиусе в целую сажень разница между истинной длиной окружности и построенной по этому способу менее 0,12 *мм*.

122. Средневековый арабский ученый Албируни (IX век) вычислил радиус земного шара на основании следующего измерения. Он измерил непосредственно понижение горизонта при наблюдении с вершины горы (в Индии) высотою в 652 локтя; оно оказалось равным 34′. Отсюда он вычислил длину окружности земного шара.

Каким способом выполнил он это вычисление? Чему равен арабский локоть, если считать измерение сделанным верно?

Решение. Прилагая прием вычисления, объясненный в задаче № 106, получаем:

$$34 = \frac{1304 \cdot 360 \cdot 60}{2\pi\sqrt{2R \cdot 652}}.$$

Отсюда легко определяется R (радиус земного шара), а следовательно и окружность Земли, — в локтях.

На второй вопрос задачи дает ответ то же выражение, если в него подставить вместо R ве-

личину земного радиуса, а множитель 652 считать неизвестным — x:

$$34 = \frac{2x \cdot 360 \cdot 60}{2\pi\sqrt{2Rx}} = \frac{2x \cdot 360 \cdot 60}{2\pi\sqrt{13000000x}},$$

Откуда

$$x = \frac{34^2 \cdot \pi \cdot 13000000}{(21600)^2} = 114.$$

Следовательно, 652 локтя = 114 метрам, или 1 локоть = 0,18 метра, — если измерение высоты горы и угла понижения горизонта было выполнено правильно (в чем нельзя, конечно, быть уверенным, принимая во внимание несовершенство угломерных инструментов того времени; кроме того, не была принята во внимание атмосферная рефракция).

IX.

Задачи для оживления занятий.

Нужно ли время от времени нарушать деловую атмосферу классных занятий поучительной шуткой или занимательным отступлением — это, конечно, вопрос вкуса и привычек преподавателя. Мне представляется, что в числе средств освежения утомленного внимания такой прием вполне позволителен и уместен. Немецкий педагог проф. Г. Ган в своей известной серии „Physikalische Freihandversuche“ пишет: „Смех может сослужить преподавателю хорошую службу, особенно у начинающих слушателей, которых скучные, строго научные опыты могут сделать рассеянными. В наших сборниках мы поэтому отвели довольно видное место опытам, которые на первый взгляд могут показаться игрушками, но которые при соответствующем объяснении обосновывающих их принципов, должны иметь серьезное значение... Смеющийся мудрец обучает успешнее мрачного.“ Сказанное вполне применимо и к преподаванию математики. Занятие математикой в школьной обстановке более всякого другого учебного предмета нуждается в подобных средствах освежения внимания, и потому

преподавателю полезно иметь в запасе подбор таких любопытных или поражающих задач из разных отделов курса, чтобы в нужный момент располагать средством быстро поднять настроение класса, сосредоточить ослабевшее внимание на математической шутке, парадоксе, забаве. Выбор подобных задач довольно ограничен, и потому ряд примеров не будет здесь излишен.

123. Угол в $10'$ рассматривается в лупу, увеличивающую в 6 раз. Какой величины кажется при этом угол?

Решение. Этот вопрос может в отдельных случаях вызвать и неправильный ответ (1°), но большинство учащихся сообразят, что величина угла не изменяется при рассматривании в лупу. Однако, дать обоснованный ответ смогут, вероятно, лишь немногие. Учащиеся должны объяснить, почему величина угла не изменяется, хотя каждая дуга, описанная из вершины угла, несомненно представляется в 6 раз длиннее. Разгадка, конечно, в том, что и радиус этой дуги увеличивается во столько же раз.

124. Некто желает изготовить транспортир, на дуге которого были бы нанесены секундные деления хотя бы в толщину волоса (0,1 *мм*). Каков должен быть радиус подобного транспортира?

Решение. Полезно сначала предложить учащимся решить задачу устно, „на-глаз“, и записав их ответы, приступить к вычислению. Результат далеко превосходит самые щедрые оценки, потому что он равен $\frac{360 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 0{,}1}{2\pi \cdot 1000} = 20{,}6$ метра = около десяти сажен!

125. Имеется квадратный лист миллиметровой бумаги в 1 метр ширины. Сколько времени понадобится, чтобы проставить точки в каждой клетке этого листа, полагая по одной точке в секунду и работая непрерывно 8 часов в сутки?

Решение. Около месяца! (Миллион точек — миллион секунд; в сутках же всего 86 400 секунд).

Столь же неожидан результат следующей, сходной с предыдущей, задачи:

Если все кубические миллиметры, заключающиеся в 1 кубическом метре, поставить друг на друга, то какой высоты получится столб?

Решение. $1000 \times 1000 \times 1000$ миллиметров = 1 000 километров! (Такие задачи лучше предлагать для устного решения).

126. Если бы мы могли обойти земной шар по экватору, то макушка нашей головы описала бы более длинный путь, чем каждая точка ступней. Как велика эта разница?

Решение. Принимая рост человека в 175 *см* и обозначив радиус Земли через R, имеем:

$$2\pi(R + 175) - 2\pi R = 2\pi \quad 175 = 1099{,}56 \text{ см}, \text{ т.-е. около 11 метров.}$$

Поразительно здесь то, что результат совершенно не зависит от радиуса шара и, следовательно, одинаков на самом большом солнце и на самом маленьком шарике.

127. Каких размеров потребовался бы кубический ящик, чтобы вместить всех людей на свете

(1 700 миллионов), считая по 6 человек в 1 куб. метре [1]).

Ответ, что ребро ящика не превысило бы $^2/_3$ версты (660 метров), явится для большинства неожиданным. Еще поразительнее ответ на такой вопрос:

128. Если бы все население земного шара утонуло в Ладожском озере, то насколько поднялся бы в нем уровень воды? Поверхность Ладожского озера — 18 000 кв. километров. Человеческое тело вытесняет в среднем 50 куб. дециметров.

Ответ. Уровень воды поднялся бы всего на $^1/_2$ сантиметра.

129. Средний палец гранитной статуи Мемнона в Египте имеет в длину 138 *см.* Зная, что гранит в 3 раза тяжеле человеческого тела, определить, сколько весит эта статуя.

Решение. Измерением находим длину среднего пальца человека — около 8 *см.* Следовательно, объем статуи превосходит объем человеческого тела в $\left(\frac{138}{8}\right)^3$ раз. Человек весит около 60 килограммов; сделанный из гранита в натуральную величину, он весил бы $60 \times 3 = 180$ *кг.* Следовательно, статуя Мемнона весит.

$$180 \times \frac{138^3}{8^3} = 910\,414 \text{ килограммов,}$$

[1]) Объем человеческого тела — около 50 куб. дециметров, т.-е. $^1/_{20}$ куб. метра. Но человеческие тела, конечно, не укладываются вплотную, поэтому мы отводим места больше.

или около 910 тонн (54 000 пудов — вес 15-ти паровозов).

Некоторые задачи этого типа могут быть заимствованы из произведений изящной литературы. Один пример такой задачи — из „Короля Лира" (стр. 108) мы уже рассмотрели. Приведу еще несколько.

130. В статье Н. В. Гоголя „Об архитектуре нашего времени" находим такие строки:

„Башни огромные, колоссальные необходимы в городе... У нас обыкновенно ограничиваются высотою, дающей возможность обглядеть один только город, между тем как для столицы необходимо видеть, по крайней мере, на полтораста верст во все стороны, и для этого, может быть, один только или два этажа лишних — и все изменяется. Объем кругозора по мере возвышения распространяется необыкновенною прогрессией".

Верно ли последнее утверждение? И возможно ли сооружение башни с дальностью горизонта в 150 верст?

Решение. 1) Утверждение не верно, так как из формулы дальности горизонта $\sqrt{2Rh}$ (см. главу VIII,2) следует, что дальность растет гораздо медленнее возвышения h, именно пропорционально квадратному корню из него. Поэтому „один только или два этажа лишних", т.-е. прибавка 2 — 4 сажен к высокому зданию, почти ничего не изменяют; например, при высоте в 300 *м* (Эйфелева башня) прибавка 6 *м* к высоте увеличит дальность горизонта всего на 1% (см. зад. № 112).

2) Башня с дальностью горизонта 150 верст должна иметь в высоту $\frac{150^2}{12\,000} = 1^7/_8$, т.-е. почти 2 версты, вшестеро выше башни Эйфеля!

131. Из „Скупого рыцаря" Пушкина:

„Читал я где-то,
Что царь однажды воинам своим
Велел снести земли по горсти в кучу, —
И гордый холм возвысился, и царь
Мог с вышины с весельем озирать —
И дол, покрытый белыми шатрами.
И море, где бежали корабли".

Вычислите высоту такого холма и дальность обозреваемого с его вершины горизонта. В основу расчетов положите следующие данные. Численность армии примите в 100 000 воинов. Число горстей земли, заполняющих один куб. дециметр — 10. Примите, что холм был конический и имел так называемый естественный откос, т.-е. что образующая конуса составляла 45° с диаметром основания. Окружающую местность считайте равниной.

Какой высоты был бы холм и как далеко можно было бы с его вершины видеть, если бы он был сооружен армией современной численности, — напр. в 1 000 000 человек?

Какой высоты достигал бы подобный холм, если бы в его возведении участвовало все человечество, т.-е. 1700 миллионов человек?

Решение. Объем холма, насыпанного 100 000 воинами, равнялся, по условиям задачи $100\,000 \cdot \frac{1}{10} =$ $= 10\,000$ куб. дециметров $= 10$ куб. метров (около 1 куб. сажени). Уже из этого подсчета видно, что холм должен быть невысокий. Вычисление высоты легко выполнить, если принять во внимание, что согласно условию задачи, она равна радиусу окружности основания (образующая составляет с радиусом основания угол в 45°). Следовательно, обозначив искомую высоту через x, имеем:

$$10 = \frac{1}{3}\pi x^3,$$

Откуда

$$x = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}} = 2{,}12 \text{ метра, т.-е. одна сажень!}$$

Дальность горизонта для глаза, находящегося на высоте $2{,}11 + 1{,}7 = 3{,}72$ метра, равна

$$\sqrt{12800000 \cdot 3{,}72} = 6{,}89 \text{ километров,}$$

т.-е. всего лишь на 2,2 километра больше, чем видит человек на ровном месте!

Холм, сооруженный 1 000 000 участников, был бы выше сейчас вычисленного в $\sqrt[3]{10}$, т.-е. в 2,15 раз, а холм, насыпанный всем человечеством — в $\sqrt[3]{17000}$ т.-е. в 25,2 раза, другими словами, имел бы в высоту 53 метра (половина высоты Исаакиевского собора).

Результаты поражают нас своими неожиданно маленькими размерами, так как мы склонны, при глазомерной оценке объема конуса, значительно преуменьшать его.

132. В „Путешествии Гулливера“ описана страна великанов, где линейные протяжения всех предметов в 12 раз больше нормальных. На Гулливера однажды посыпались там яблоки с дерева, и одно из них даже сшибло его с ног. Сколько примерно могло весить такое яблоко?

Решение. Если принять вес нормального яблока в $\frac{1}{4}$ фунта, то яблоко страны великанов должно было весить в 12^3, т.-е. в 1728 раз больше; $\frac{1}{4} \cdot 1728 = 432$ фунта, или почти 11 пудов! Падение такого яблока на спину Гулливера должно было не сшибить его с ног, а раздавить. Оно должно было иметь до аршина в ширину и больше сажени в обхвате...

(Перстень, который Гулливер получил от великанов в подарок, должен был весить около полупуда, и т. п.).

133. В стране лиллипутов, посещенной Гулливером, все предметы имели линейные протяжения, в 12 раз меньше нормальных. Мог ли там Гулливер съесть за обедом целого быка?

Решение. Если вес нормального быка принять в 40 пудов, то бык страны лиллипутов должен весить менее 1 фунта $\left(\frac{1600}{1728}\right)$. Съесть фунт мяса за обедом возможно. (Но едва ли возможно

было одному человеку съесть „20 повозок с мясом“, как описано в „Путешествии“, так как считая в нормальной повозке даже всего 10 пудов — это составляет $\frac{10 \cdot 20}{1728} =$ около 5 фунтов).

134. Содержание рассказа Л. Толстого „Много ли человеку земли нужно“ общеизвестно. В нем расказывается, что крестьянину отводилось столько земли, сколько он успевал обежать в течение одного дня. По какому контуру ему выгоднее было бежать: по квадратному, шестиугольному (правильный шестиугольник) или по кругу?

Решение. Задача сводится к определению того, какая из трех названных фигур при равных периметрах обладает большею площадью. Приняв периметр равным 1-це, имеем, что площадь квадрата $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Площадь шестиугольника $= \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{24}$. Площадь круга $= \pi \left(\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{1}{4\pi}$.

Отношение площадей трех фигур:

$$\frac{1}{16} : \frac{\sqrt{3}}{24} : \frac{1}{4\pi} = 3 : 3{,}46 : 3{,}82.$$

Очевидно, бежать по кругу всего выгоднее: его площадь, при одинаковом периметре, больше площади квадрата на 27%, а правильного шестиугольника — на 11%.

(Предложенная в более общем виде, задача эта приводит к известной проблемме: какая из

фигур с одинаковыми периметрами имеет наибольшую площадь?).

Сюда же можно отнести и некоторые исторические задачи — например, известные стихотворные задачи индусского математика Баскары („Тополь“ и „Лотос“), задачи из „Арифметики“ Магницкого, упражнения с „китайской головоломкой“ [1]) и др.

[1]) Они имеются в моем „Задачнике“, 2-е изданис. — В рассматриваемую рубрику можно было бы включить также многие из задач, рассмотренных в главе VII и в § 9 главы VIII: задачи из живой природы и задачи с историческим содержанием.

X.

Геометрия во время экскурсий.

Прекрасным средством для воспитания геометрических навыков и развития чувства реальности являются упражнения на открытом воздухе, так как здесь условия задач не перечисляются словесно, а предлагаются непосредственно в натуре [1]). Нет надобности непременно устраивать специальные геометрические экскурсии; достаточно, если во время естественно-научной экскурсии в природу будет уделено час-полчаса — например, на пути туда или обратно — геометрическим упражнениям.

Обычно думают, что геометрические занятия на вольном воздухе могут быть лишь землемерного характера. Конечно, съемка плана местности является безусловно полезным упражнением при изучении науки, выросшей из землемерия. Но такого рода работы используют геометрические знания черезчур односторонне. Не останавливаясь

[1]) Я говорю здесь только об экскурсиях в открытую местность, а не на заводы, так как в экскурсиях последнего рода элемент геометрический совершенно заслоняется техническим и может быть выделен лишь попутно, как второстепенный материал.

на них — так как тема эта достаточно освещена в учебниках и отдельных брошюрах [1]) — укажу на ряд разнообразных упражнений другого рода, которые легко выполнить попутно с экскурсиями естественно-научными.

Прежде всего следует научить учащихся мерить шагами, чтобы не носить с собою в экскурсию мерной цепи или рулетки. Такие упражнения, для оживления интереса к ним, следует соединять с предварительной глазомерной оценкой расстояний, благодаря чему незаметно изощряется и глазомер учащихся.

Далее, надо познакомить учащихся с производством так называемой „маршрутной съемки" пройденного пути. В общих чертах работа эта сводится к следующему. В месте выхода из города определяют по компасу направление на ближайшую точку пути (отдаленное дерево, валун, верстовой столб, угол здания), наносят это направление, по глазомеру, на бумагу, записав при нем соответствующий „румб". Идя по этому направлению до замеченного предмета, измеряют расстояние шагами. Отложив, по произвольному масштабу (на-глаз) это расстояние по прочерченному направлению, с соответствующей числовой пометкой, определяют по компасу направление на следующий ближайший этап, измеряют расстояние шагами, и т. д., отмечая все это на черновом плане. По этому наброску и сделанным пометкам (относительно направлений и расстояний) изготовляют дома более аккуратно маршрутный план экскурсии. Все замеченные по пути особые места, лежащие вне дороги, также могут быть нанесены на этот план, если были измерены направления на них из определенных точек и соответствующие расстояния.

[1]) Одна из лучших — обстоятельная брошюра С. Орлова „Первые работы по измерению земли" (Гос. Изд.. М. 1921), имеющая в виду именно потребности общеобразовательной школы.

Конечно, такой работе должны предшествовать упражнения в ориентировании по компасу. Полезно попутно познакомить и с известным приемом пользования карманными часами вместо компаса, а также компасом вместо часов [1]).

Очутившись возле одинокого дерева, не надо упускать случая измерить его диаметр по окружности, а также его высоту по тени или каким-либо другим из многих способов геометрического определения недоступных высот (предоставляя выбор приема изобретательности учащихся). Определение объема стоящего дерева представляет более сложную задачу — необходимо знание того, что в лесоводстве называется „видовым числом" [2]), — но приближенное вычисление объема срубленного

[1]) См. № 86 моего „Задачника".

[2]) „Видовым числом" называется отношение объема дерева к объему цилиндра, имеющего ту же высоту и площадь сечения (на высоте груди, — 1,3 метра). Приводим средние видовые числа для четырех пород:

Сосна	0,45 — 0,48
Ель	0,45 — 0,55
Дуб	0,25 — 0,53
Береза	0,44 — 0,46

Числа эти относятся только к объему крупной древесины (сучья и вершина отбрасывается) и применимы лишь к деревьям, выросшим в лесу.

С увеличением высоты дерева видовые числа уменьшаются; с увеличением возраста — увеличиваются.

дерева вполне посильно учащимся, знакомым с формулой цилиндра [1]).

Встретив стог соломы в форме цилиндра с конической верхушкой или призмы с пирамидальным верхом, надо определить его объем, сделав необходимые измерения (высоту определяют косвенным приемом); заодно определяют и вес стога (1 куб. сажень соломы весит пудов 60).

Подойдя к колодцу — делают необходимые промеры для вычисления числа ведер воды в нем, принимая объем ведра равным $^1/_{80}$ куб. метра.

Кучи щебня или песку на шоссе также следует обмерять (объем конуса по окружности основания и длине образующей, — ср. зад. № 26), также, как и объем погонной сажени встретившейся канавы (обычно с сечением в форме трапеции).

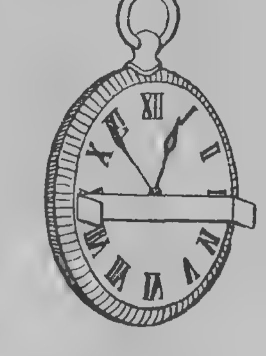
Подойдя к реке, надо измерить с учениками ее ширину одним из многочисленных приемов измерения недоступных расстояний, — например, помощью прямоугольного треугольника с углом в 45 или 30° (см. далее № 135). Если есть время и необходимые приспособления, нужно измерить скорость течения реки [2]); далее, определить форму

[1]) Ствол, подлежащий измерению, разделяют мысленно на части (обрубки) и вычисляют объем каждой части отдельно (как объем цилиндра такой же длины с диаметром основания, равной ширине данного обрубка посередине его длины). Объем ствола равен сумме объемов этих обрубков. Чем короче обрубки, тем результат точнее. На месте, конечно, производят только необходимые измерения, а самые вычисления выполняют дома.

[2]) За недостатком места, намечаю только темы работ; указания на способы их выполнения рассеяны в разных местах моего „Задачника". Они будут рассмотрены также в подготовляемой мною книге „Геометрия на вольном воздухе".

и площадь „живого сечения" и вычислить по этим данным количество воды, протекающей через это сечение в секунду или в час. Не трудно измерить и „падение" реки — изменение высоты уровня воды в двух точках, деленное на расстояние между ними.

В качестве простого нивеллира для работ, не требующих точности, могут быть использованы карманные часы: на стекло их наклеивать полоску бумаги с отогнутыми концами так, чтобы верхний ее край приходился на линии IX — III (см. черт. 33). Когда часы держат за цепочку, то верхние края полоски и отогнутых ее концов определяют положение горизонтальной плоскости. Держа часы на уровне глаз, „визируют" по краю полоски те предметы, высоты которых подлежат сравнению [1]).



Черт. № 33. Карманные часы в роли нивеллира.

У железнодорожного моста следует обратить внимание экскурсантов на систему треугольников в его ферме, объяснив значение такого скрепления опорных балок (см. зад. № 16).

Очутившись у закругления железнодорожного пути, нужно рассмотреть *сопряжение* пря-

[1]) Укажем также, что необходимый для более точного нивеллира уровень с пузырьком может быть изготовлен из лампового стекла, закрытого пробками и заполненного водой с оставленным в нем пузырьком воздуха. Положение середины пузырька при горизонтальном положении плоскости опоры стекла отмечают черточкой.

мых и кривых частей пути (то-есть такое соединение линий, при котором прямая служит касательной к дуге в точке их соединения, а две дуги имеют в точке соединения общую касательную). Далее можно вычислить радиус дуги закругления одним из способов, указанных выше (№№ 33, 35), а также попытаться разыскать центр этой дуги.

На ровной открытой местности можно вычислить дальность горизонта (VIII, 2) и, если удобно, проверить результат непосредственным измерением. Интересно определить, сколько квадратных верст охватывает кругозор в данной точке (см. замечание к зад. № 106).

Помощью пальцев или самодельным угломером (VIII, 1) можно измерять углы зрения и, сообразно с обстоятельствами, вычислять по ним либо расстояние, либо размеры отдаленных предметов. Подобные же вычисления еще удобнее выполнять пользуясь „глазным параллаксом“ (№ 139).

В ясный звездный вечер полезно убедиться, что увеличение размеров (угловых) созвездий близ горизонта есть не более, как обман зрения.

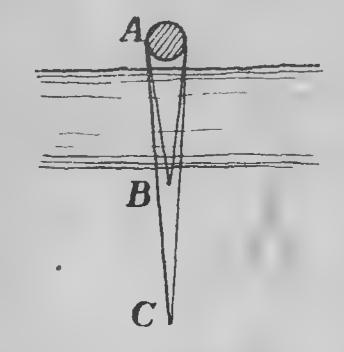
Стоя в длинной лесной просеке, интересно вычислить, как далеко должна находиться та точка, где обе стены леса кажутся нормальному глазу сходящимися, т.-е. где просвет — ширина просеки — усматривается под углом менее 1' (ср. зад. № 92).

Возможны, наконец, на открытой местности и геометрические занятия иного рода. Например: разбить на местности прямоугольный треугольник больших размеров и убедиться измерением (шагами), что сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы; убедиться, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке; провести большую окружность (помощью бечевки и колышка) и найти отношение ее длины к диаметру; найти π катанием колеса (например, велосипедного); изобразить в масштабе план солнечной системы; найти построением на земле и измерением шагами $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{35}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{165}$ (см. № 140), и т. п.

Много интересных тем, без сомнений, возникнет во время занятий, выдвинутые самими учащимися.

В заключение остановлюсь на немногих примерах.

134. (Из „Астрономии“ Араго). „Наблюдатель находится на одной стороне реки, через которую нет ни моста, ни брода. Требуется определить ее ширину“.

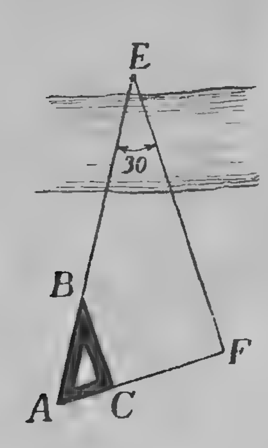


Черт. 34. К зад. № 134.

Решение. „Для этого мы визируем какой-либо предмет A, находящийся на противоположной стороне реки (например, ствол дерева); пусть диаметр его виден из B под углом в 1°. Затем наблюдатель удаляется от первого места наблюдения по направлению прямой AB, пока не достигнет точки C, из которой ствол дерева A виден под углом вдвое меньшим, чем из B. В этой точке расстояние от дерева будет вдвое больше, чем в первой, следовательно $BC = AB$. Стоит только измерить рас-

стояние BC, чтобы получить расстояние до неприступной точки A, или, что то же самое, ширину реки, вовсе не переходя через нее“.

135. Найти ширину реки, пользуясь треугольником (деревянным) с углом в 30°.



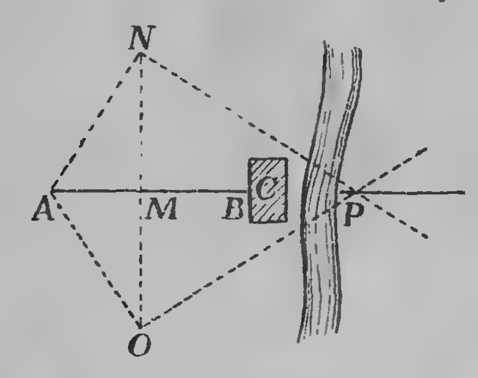
Черт. 35. К зад. 135.

Решение. Поместив треугольник ABC (черт. 34) так, чтобы, визируя вдоль гипотенузы, видеть предмет E на противоположном берегу, ставят веху F на продолжении AC в точке основания перпендикуляра из E на AF. Расстояние $AF = \frac{1}{2}\,AE$. Так как AF можно измерить непосредственно, то определяется и расстояние AE, откуда нетрудно уже найти ширину реки.

136. При землемерной работе потребовалось продолжить прямую линию за препятствие, которое нельзя обойти, — например (черт. 36) продолжить прямую AB за реку, при чем в направлении AB через реку визировать нельзя (мешает здание C). Как это выполнить?

Решение. Через произвольную точку M прямой AB проводим перпендикуляр, на котором, по обе стороны прямой AB отмеряем равные расстояния MN и MO. Соединяем N и O с A и через точки N и O проводим прямые, перпендикулярные к AN и AO. Легко доказать, что точка пересечения их P должна лежать на продолжении прямой AB и что прямая, делящая угол P пополам, совпадает с прямой AB.

137. Издали виден ряд телеграфных столбов, линия которых тянется перпендикулярно к лучу зрения — прямой линии, проведенной к ней из глаза наблюдателя. Расстояние между двумя со-



Черт. 36. К зад. № 136.

седними столбами (обычно 25 сажен) видно под углом в $4\frac{1}{2}°$. Как велико расстояние от наблюдателя до телеграфной линии?

Решение.

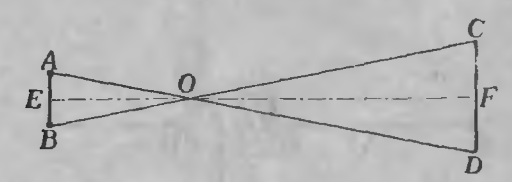
$$\frac{25 \cdot 2 \cdot 360}{9 \cdot 2\pi} = 318 \text{ сажен.}$$

138. Товарный вагон, видимый вами вдали, как раз покрывается по ширине ногтем указательного пальца вашей вытянутой руки. Зная, что ширина

вагона 3 сажени, можете ли вы приблизительно определить расстояние от вас до вагона?

Решение. Так как ноготь указательного пальца вытянутой руки усматривается под углом в 1° (см. стр. 104), то вагон находится на расстоянии 3 . 57 = около 170 сажен.

139. Глядя на палец протянутой вперед руки попеременно правым и левым глазом, вы замечаете, что он покрывает различные точки отдаленного



Черт. 37. К зад. № 139.

предмета. Зная расстояние между зрачками глаз ($6^1/_2$ *см*) и измерив расстояние от глаз до пальца в описанном положении, как воспользоваться этими данными для оценки расстояния или величины отдаленного предмета?

Решение. Если на черт. A и B изображают положение зрачков наблюдателя, а O — положение пальца, то C и D будут те точки отдаленного предмета, которые покрываются пальцем при рассматривании его каждым глазом в отдельности. Из подобия треугольников AOB и COD имеем (OF и OE — высоты)

$$\frac{OF}{CD} = \frac{OE}{AB}.$$

Если AB, расстояние между зрачками, $= 6^1/_2$ сантиметров, а расстояние $OE = 65$ сантиметрам, то $\frac{OE}{AB} = 10$, и следовательно

$$CD = 0{,}1\ OF.$$

Отсюда, зная CD, легко определить OF, а также наоборот, — как видно из следующей задачи:

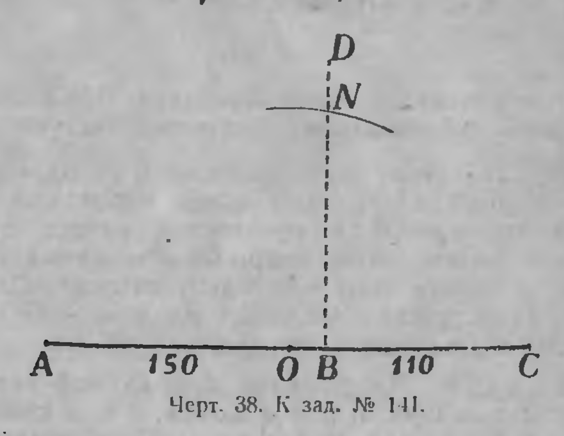
140. Как далеко (приблизительно) находится от вас товарный вагон, если конец карандаша, который вы держите в протянутой вперед руке, кажется правому глазу покрывающим левый край вагона, а левому глазу — середину вагона? Длина вагона 4 саж.; расстояние между зрачками — $6^1/_2$ *см*; расстояние от глаза до карандаша — 65 *см*.

Решение. Из решения предыдущей задачи видно, что половина длины вагона, т.-е. 2 сажени, составляет $^1/_{10}$ расстояния его до наблюдателя. Значит, вагон находится в расстоянии 20 сажен.

141. Построением на местности извлечь корень квадратный из 165.

Решение. Разлагаем 165 на два множителя 15 и 11 и отмеряем на прямой $AB = 150$ шагов и, далее, $BC = 110$ шагов. Делим AC пополам (или проще, отсчитываем от точки B в сторону длинного отрезка 20 шагов) и из полученной точки O засекаем радиусом OC дугу на перпендикуляре BD к AC: практически это делается так, что к колышку в O привязывают бечевку длиною 130 шагов, и мерщик, держа противоположный ее конец в руке, идет из B по линии BD до той точки N, далее которой натянувшаяся веревка его не пустит.

Число шагов в отрезке BN, деленное на 10, есть искомый корень (должно получиться в результате 128 шагов, т. е. $\sqrt{165} = 12,8$).



Черт. 38. К зад. № 141.

К задачам, более или менее тесно связанным с экскурсиями, относятся также следующие, рассмотренные выше упражнения этой книги: №№ 9, 13, 16, 22, 26, 29, 33, 34, 63а, 65, 80 — 84, 85 (и замечание к нему), 86, 92, 94, 95, 96, 101, 102, 104.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

СОЧИНЕНИЯ ТОГО ЖЕ АВТОРА.

Занимательная физика. Книга 1-я и 2-я. Изд. 5-е. 1922.
Физическая хрестоматия. Ч. 1-я и 2-я. 1922 — 1923.
Межпланетные путешествия. Изд. 4-е. 1923.
Далекие миры. Изд. 2-е. 1919.
Новый задачник по геометрии. 1922 (2-е изд. в печати).
Загадки и диковинки в мире чисел. 1923.
Веселые задачи. Для юных математиков. Изд. 2-е. 1919.
Метрическая система. Обиходный справочник. 1923.
Новые и старые меры. Изд. 3-е. 1923.